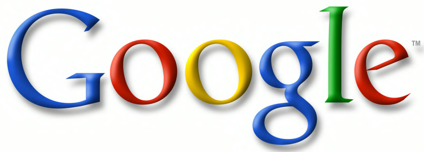


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/





ONS

ÈBRE.



LEÇONS

D'ALGÈBRE.



LEÇONS
D'ALGÈBRE.



PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET Ce,
Rue Racine, 26, près de l'Odéon.



LEÇONS

D'ALGÈBRE

CONFORMES

AUX PROGRAMMES OFFICIELS DE L'ENSEIGNEMENT DES LYCÉES,

PAR CHARLES BRIOT,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS,
MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.



PREMIÈRE PARTIE,

à l'usage des élèves

DE LA CLASSE DE SECONDE ET DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES,
A L'ÉCOLE DE MARINE, ET A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR;

PRÉCÉDÉE D'UNE INTRODUCTION

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE LA CLASSE DE TROISIÈME.



QUATRIÈME ÉDITION.



PARIS.

VICTOR DALMONT, ÉDITEUR,

Successeur de Carilian-Gœury et Vve Dalmont,

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n° 49.

1858

181. a. 9.

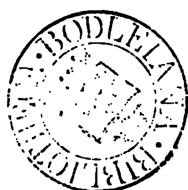

BODLEIANA
BIBLIOTHECA

TABLE DES MATIÈRES.

Cette table des matières est la reproduction du Programme officiel pour la classe de seconde. (Le même programme a été adopté pour l'examen du baccalauréat ès sciences, et pour l'admission à l'École de marine et à l'École de Saint-Cyr.)

Les questions marquées d'un astérisque font partie du programme d'admission à l'École polytechnique.

INTRODUCTION.

LIVRE PREMIER.

CALCUL ALGÉBRIQUE.

LIVRE II.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

LIVRE III.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

LIVRE IV.

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES.

LEÇONS D'ALGÈBRE.

INTRODUCTION (*).

EMPLOI DES SIGNES ET DES LETTRES COMME MOYEN D'ABRÉVIATION ET DE GÉNÉRALISATION.

Signes algébriques.

1. Pour abréger l'écriture et faciliter le raisonnement, on est convenu de représenter les quantités par des lettres. On a coutume d'affecter les premières lettres de l'alphabet a, b, c, ... aux quantités connues, les dernières x, y, z, ... aux quantités inconnues.

On a imaginé aussi des signes pour indiquer les diverses opérations de l'arithmétique.

Le signe $+$, que l'on prononce *plus*, indique l'addition. Ainsi, 5 plus 3 s'écrit

$$5 + 3.$$

Le signe $-$, que l'on prononce *moins*, indique la soustraction. Ainsi, 5 moins 3 s'écrit

$$5 - 3.$$

(*) Ce chapitre d'introduction renferme les matières des huit leçons qui, d'après le programme, doivent être consacrées, dans la classe de troisième, à donner aux élèves les premières notions d'algèbre.

Le signe $\times$, que l'on prononce *multiplié par*, indique la multiplication. Ainsi, 5 multiplié par 3 s'écrit

$$5 \times 3.$$

Pour abréger encore davantage, lorsque les quantités sont représentées par des lettres, on indique leur produit en mettant simplement ces lettres les unes à la suite des autres et sous-entendant le signe $\times$. Ainsi, le produit $a \times b \times c$ s'écrit plus simplement

$$abc.$$

Le produit $4 \times a \times b \times c$ s'écrira

$$4abc.$$

On indique la division par une barre horizontale au-dessus de laquelle on écrit le dividende, au-dessous le diviseur. Ainsi, 5 divisé par 3 s'écrit

$$\frac{5}{3}.$$

C'est le signe de la fraction en arithmétique.

On indique la puissance d'un nombre, ou le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre, par un petit chiffre placé en haut et à droite et marquant le nombre des facteurs ou le degré de la puissance. Ainsi, la troisième puissance de la quantité a s'écrit

$$a^3;$$

prononcez a trois. Le nombre 3 se nomme *exposant*.

On indique la *racine* par le signe $\sqrt{}$, au-dessous duquel on écrit le nombre dont on extrait la racine. Ainsi, la racine quatrième de la quantité a s'écrit

$$\sqrt[4]{a}.$$

L'*indice* du radical, qui est ici 4, se met dans l'ouverture.

Cependant, quand il s'agit de racines carrées, on se dis-

pense de mettre l'indice 2. Ainsi la racine carrée de a s'écrit simplement

$$\sqrt{a}.$$

On se sert du signe $=$, que l'on prononce *égale*, pour exprimer l'égalité de deux quantités. Ainsi, 5 plus 3 égale 8 s'écrit

$$5 + 3 = 8.$$

Le signe $>$ veut dire *plus grand que*, le signe $<$ *plus petit que*. Ainsi, 5 plus grand que 3 s'écrit

$$5 > 3.$$

Au contraire, 3 plus petit que 5 s'écrit

$$3 < 5.$$

On remarquera que ces signes d'inégalité ont la forme d'un angle, et que la quantité la plus grande est toujours placée du côté de l'angle.

Quelques exemples feront bien comprendre l'utilité de ces différents signes et le but de l'algèbre.

Emploi des signes comme moyen d'abréviation.

2. PROBLÈME I. *Partager* 50 *francs entre trois personnes, de manière que la première ait* 6 *francs de plus que la seconde, la seconde* 4 *francs de plus que la troisième.*

Voici comment on peut résoudre cette question avec les seules ressources de l'arithmétique.

Il est clair que si l'on connaissait l'une des parts, on obtiendrait ensuite facilement les deux autres. Cherchons, par exemple, la troisième part : la seconde part surpasse la troisième de 4 francs; la première, surpassant la seconde de 6 francs, surpasse la troisième de 4 plus 6, c'est-à-dire de 10 francs. La somme des trois parts se compose donc de trois fois la troisième part, plus 4, plus 10, c'est-à-dire

plus 14. Mais cette somme est égale au nombre à partager 50. Si de 50 nous ôtons 14, le reste 36 sera égal à trois fois la troisième part; si nous divisons 36 par 3, nous aurons la troisième part 12.

Ainsi la troisième part est 12. La seconde, qui la surpasse de 4 francs, est 16. La première, qui surpasse la seconde de 6 francs, est 22.

3. Reprenons la même question en écrivant les raisonnements au moyen des signes de l'algèbre.

Nommons la troisième part . . . . x,
la seconde, qui la surpasse de 4, sera . . . $x + 4$,
la première, qui surpasse la seconde de 6,
sera . . . . $x + 4 + 6$.

La somme des trois parts est . . . . . . $3x + 14$.
Mais cette somme doit être égale au nombre à partager 50, ce qui s'écrit

$$3x + 14 = 50;$$

prononcez trois x plus 14 égale 50.

On nomme *équation* une égalité dans laquelle entre au moins une lettre représentant une quantité inconnue. Les raisonnements qui précèdent nous ont conduit à l'équation

$$3x + 14 = 50.$$

Il s'agit maintenant de résoudre cette équation, c'est-à-dire de trouver la valeur inconnue de x.

Si, de ces deux quantités égales, nous retranchons la même quantité 14, il restera évidemment deux quantités égales,

$$3x = 50 - 14 = 36.$$

Enfin, si nous divisons par 3, nous aurons

$$x = \frac{36}{3} = 12.$$

La question est résolue, puisqu'il suffit de connaître la troisième part pour avoir les deux autres.

4. Problème II. *Partager 167 francs entre quatre personnes, de manière que la première ait 2 francs de plus que la seconde, la seconde 7 francs de plus que la troisième, et la troisième 5 francs de plus que la quatrième.*

Nommons la quatrième part . . . . . x,
la troisième sera . . . . $x+5$,
la deuxième . . . . $x+5+7$,
la première . . . . $x+5+7+2$.

La somme des quatre parts est $4x+31$; mais cette somme doit être égale au nombre à partager 167, ce qui s'écrit

$$4x+31=167.$$

Pour résoudre cette équation, on opérera comme précédemment. Je retranche 31 des deux côtés, j'ai

$$4x=167-31=136.$$

Je divise ensuite par 4, ce qui donne

$$x=\frac{136}{4}=34.$$

Ainsi, la quatrième part est 34 francs; la troisième 39 francs, la deuxième 46 francs, la première 48 francs.

On vérifiera que la somme est bien 167.

5. Problème III. *Partager 53 francs entre deux personnes, de manière que la première ait un tiers de plus que la seconde, plus encore 4 francs.*

Nommons la seconde part . . . . x,
la première sera . . . . $x+\frac{x}{3}+4$.

Or la somme des deux parts doit être égale à 53; on a donc l'équation

$$2x+\frac{x}{3}+4=53.$$

Puisque $2+\frac{1}{3}$ font $\frac{7}{3}$, $2x+\frac{x}{3}$ font $\frac{7x}{3}$, et l'équation s'écrira plus simplement

$$\frac{7x}{3}+4=53.$$

Pour résoudre cette équation, nous retrancherons d'abord 4 de part et d'autre, ce qui donne

$$\frac{7x}{3}=53-4=49.$$

Si nous multiplions ensuite par 3 ces deux quantités égales, nous aurons

$$7x=49\times 3=147.$$

Enfin, si nous divisons par 7, nous trouvons

$$x=\frac{147}{7}=21.$$

Quand on connaît la seconde part 21 francs, en y ajoutant son tiers 7 francs et encore 4 francs, on obtient la première part 32 francs. Et effectivement la somme des deux parts fait bien 53 francs.

6. Problème IV. ***Deux personnes possèdent le même capital. La première place le sien à* 5 *pour* 100, *la seconde à* 3 *pour* 100. *Le revenu de la première surpasse de* 400 *francs celui de la seconde. Trouver ce capital.***

Rappelons d'abord ce principe établi en arithmétique : pour trouver l'intérêt d'un capital, on multiplie le taux de l'intérêt par le capital et on divise par 100.

Si donc on désigne par x le capital cherché, le revenu de la première personne sera

$$\frac{5x}{100};$$

celui de la seconde

$$\frac{3x}{100}.$$

Puisque le revenu de la première surpasse celui de la seconde de 400 francs, on a l'équation

$$\frac{5x}{100} = \frac{3x}{100} + 400.$$

Pour résoudre cette équation, nous retrancherons d'abord $\frac{3x}{100}$ de part et d'autre, ce qui donne

$$\frac{5x}{100} - \frac{3x}{100} = 400,$$

ou, en effectuant la soustraction,

$$\frac{2x}{100} = 400.$$

Multiplions ensuite par 100, nous avons

$$2x = 40000.$$

Divisant enfin par 2, nous trouvons

$$x = \frac{40000}{2} = 20000.$$

Ainsi le capital cherché est 20000 francs.

Vérification. Le capital 20000 francs, placé à 5 pour 100, produit 1000 francs de revenu; placé à 3 pour 100, il ne produit que 600 francs. Le premier revenu surpasse bien le second de 400 francs.

Résolution d'une équation à une inconnue.

7. On voit, par ces exemples, combien l'emploi des lettres et des signes aide l'esprit et facilite le raisonnement. Ce qui précède nous fournit aussi l'occasion de faire quelques remarques utiles sur la résolution des équations.

Nous avons dit que l'on appelle *équation* en algèbre une égalité dans laquelle entre au moins une lettre représen-

tant une inconnue. Les deux quantités égales entre elles sont les deux *membres* de l'équation. Les diverses parties, séparées les unes des autres par le signe + ou par le signe —, sont les termes de l'équation.

Il est aisé de voir que l'on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre; il suffit, pour cela, de l'écrire dans l'autre membre en changeant son signe. Soit, par exemple, l'équation

$$6x - 7 = 13 + 2x.$$

Si nous ajoutons 7 aux deux membres, c'est-à-dire aux deux quantités égales, l'égalité subsiste évidemment et l'équation devient

$$6x = 13 + 2x + 7.$$

Le terme 7, qui avait le signe — dans le premier membre, est passé avec le signe + dans le second membre. De même, si nous retranchons $2x$ des deux membres, l'équation devient

$$6x - 2x = 13 + 7.$$

Le terme $2x$, qui avait le signe + dans le second membre, est passé avec le signe — dans le premier.

Ce principe de la transposition des termes est extrêmement utile; il remplace les raisonnements et permet d'opérer en quelque sorte mécaniquement la résolution des équations. On fait passer les termes connus dans un membre, les termes inconnus dans l'autre; on réduit et on divise par le multiplicateur de l'inconnue.

Ainsi l'équation précédente est devenue

$$6x - 2x = 13 + 7.$$

En réduisant, on a

$$4x = 20,$$

et, en divisant par 4,

$$x = \frac{20}{4} = 5.$$

On peut vérifier que 5 est bien la valeur de l'inconnue;

car, en remplaçant x par 5 dans l'équation proposée, les deux membres deviennent tous deux égaux à 23.

8. Considérons encore l'équation

$$8x - 17 = 5x - 2.$$

On fera d'abord passer le terme 17 dans le second membre en changeant son signe, ce qui donne

$$8x = 5x + 17 - 2.$$

Mais le terme $5x$, qui est en tête du second membre, n'a pas de signe : on procédera comme s'il était affecté du signe + et on le fera passer dans le premier membre avec le signe —. Car, si des deux membres on retranche $5x$, on a

$$8x - 5x = 17 - 2.$$

D'où l'on déduit

$$3x = 15,$$

$$x = 5.$$

Quand l'équation contient des dénominateurs, on commence par les faire disparaître en multipliant tous les termes de l'équation par un nombre convenable. Si l'équation ne renferme qu'un seul dénominateur, on multiplie par ce dénominateur. C'est ce que nous avons fait dans les problèmes III et IV. S'il y a dans l'équation plusieurs dénominateurs différents, on multiplie par leur produit ou plus simplement par leur plus petit multiple.

9. Problème V. *Trouver un nombre dont le quart augmenté de 7, égale les deux tiers diminués de 3.*

En appelant x le nombre cherché, on écrira immédiatement l'équation

$$\frac{x}{4} + 7 = \frac{2x}{3} - 3.$$

Pour chasser les deux dénominateurs 3 et 4, nous multiplierons tous les termes par le produit 12 de ces deux dénominateurs, ce qui donne

$$3x + 84 = 8x - 36.$$

Nous remarquons que pour multiplier les deux fractions $\frac{x}{4}$ et $\frac{2x}{3}$ par 12, il suffit de multiplier leurs numérateurs par 3 et 4, en ôtant les dénominateurs.

Par la transposition des termes, l'équation devient

$$84 + 36 = 8x - 3x,$$

d'où l'on déduit

$$5x = 120,$$

$$x = \frac{120}{5} = 24.$$

Vérification. — Le quart de 24, augmenté de 7, donne 13; les deux tiers 16, diminués de 3, donnent aussi 13.

Mise des problèmes en équations.

10. La résolution d'un problème comprend deux parties distinctes : on met d'abord le problème en équations, c'est-à-dire que l'on établit par des équations les relations qui existent entre les quantités connues et les quantités inconnues; on résout ensuite les équations, c'est-à-dire que l'on cherche les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations. Nous avons indiqué les règles très-simples par lesquelles on résout les équations à une inconnue. La marche à suivre pour mettre un problème en équations n'est pas susceptible d'être formulée d'une manière aussi nette et précise. Dans beaucoup de cas simples, il suffit, après avoir représenté les inconnues par des lettres, d'écrire textuellement l'énoncé du problème au moyen des signes de l'algèbre; c'est ce que nous avons fait notamment pour le problème V. Mais ordinairement l'énoncé du problème ne se prête pas à cette traduction immédiate en langage algébrique; dans ce cas, la meilleure règle à suivre, c'est, après avoir bien examiné les conditions de l'énoncé et représenté les inconnues par des lettres, de raisonner comme si ces lettres représentaient des

quantités connues et d'écrire les opérations qu'il faudrait faire pour vérifier que ces valeurs des inconnues satisfont bien à l'énoncé ; on arrive ainsi sans grande difficulté aux équations du problème. C'est ainsi que nous avons procédé pour le problème IV ; nous avons représenté par x le capital inconnu et, raisonnant comme si ce capital était connu, nous avons écrit que le revenu de la première personne surpasse de 400 francs celui de la seconde. Les exemples suivants feront encore mieux comprendre ce précepte.

11. Problème VI. *Deux fontaines coulent dans un bassin ; la première, coulant seule, le remplit en 4 heures ; la seconde, coulant seule, le remplit en 6 heures. Combien de temps les deux fontaines, coulant ensemble, mettront-elles à remplir le bassin?*

Désignons par x le nombre d'heures qu'il faut aux deux fontaines pour remplir le bassin ; et raisonnons comme si nous voulions nous assurer que, dans ce temps x supposé connu, les deux fontaines, coulant ensemble, remplissent bien le bassin. La première fontaine, coulant seule, remplit le bassin en 4 heures ; en une heure, elle verse donc $\frac{1}{4}$ du bassin ; en x heures, elle en remplit une fraction marquée par $\frac{x}{4}$. La seconde fontaine, coulant seule, remplit le bassin en 6 heures ; en une heure, elle verse $\frac{1}{6}$ du bassin ; en x heures, elle en remplit une fraction $\frac{x}{6}$. Dans le temps x, les deux fontaines, coulant ensemble, versent donc une quantité d'eau représentée par

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{6},$$

la capacité du bassin étant prise pour unité. Mais, pendant

ce temps, elles doivent remplir le bassin; on a donc l'égalité

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=1.$$

Telle est l'équation du problème.

Pour la résoudre, on fera d'abord disparaître les dénominateurs; on voit de suite que 12 est le plus petit multiple des nombres 4 et 6. On multipliera donc par 12 tous les termes de l'équation, et nous observons que, pour multiplier par 12 les deux fractions $\frac{x}{4}$ et $\frac{x}{6}$, il suffit de multiplier leurs numérateurs par 3 et par 2, en ôtant les dénominateurs. L'équation devient ainsi

$$3x+2x=12;$$

d'où

$$5x=12,$$

$$x=\frac{12}{5}=2^{h}+\frac{2}{5}=2^{h}\,24^{m}.$$

Ainsi il faut 2 heures et 24 minutes aux deux fontaines coulant ensemble pour remplir le bassin.

La vérification a lieu effectivement si l'on remplace dans l'équation x par sa valeur $\frac{12}{5}$; car les deux fractions $\frac{x}{4}$ et $\frac{x}{6}$ deviennent, après simplification, $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{5}$, dont la somme est 1.

12. Problème VII. *Un père a 40 ans, son fils en a 10. Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il triple de l'âge du fils?*

Soit x le nombre d'années cherché. Après ce temps, l'âge du père sera $40+x$, l'âge du fils sera $10+x$. Comme à cette époque l'âge du père doit être triple de l'âge du fils, on a l'équation

$$40+x=(10+x)\times 3.$$

La parenthèse indique que la quantité $10 + x$ est multipliée par 3.

Pour répéter trois fois la somme $10 + x$, il suffit évidemment de répéter trois fois chaque partie; l'équation devient donc

$$40 + x = 30 + 3x,$$

d'où l'on déduit

$$x = 5.$$

Ainsi, dans 5 ans l'âge du père sera triple de l'âge du fils. Et en effet, à cette époque le père aura 45 ans, le fils 15, et 45 est bien le triple de 15.

13. Problème VIII. ***Deux courriers partent au même instant de deux villes distantes de* 100 *lieues et vont à la rencontre l'un de l'autre. Le premier fait* 3 *lieues à l'heure, le second en fait* 2. *Quels chemins les deux courriers parcourront-ils avant de se rencontrer?***

Le choix de l'inconnue a une grande importance pour la facilité des raisonnements et la simplicité des calculs. Dans le problème actuel, au lieu de prendre les inconnues indiquées par l'énoncé, c'est-à-dire les chemins parcourus, nous prendrons une autre inconnue dont les premières se déduisent aisément, savoir le temps pendant lequel marchent les deux courriers. Soit x ce temps exprimé en heures. Le premier courrier, faisant 3 lieues à l'heure, parcourra en x heures $3x$ lieues; le second, faisant 2 lieues à l'heure, parcourra dans le même temps $2x$ lieues. Mais la somme des chemins parcourus doit être égale à la distance totale 100 lieues. On a donc l'équation

$$3x + 2x = 100.$$

d'où l'on déduit

$$x = 20.$$

Ainsi les deux courriers se rencontrent après 20 heures

de marche. Le premier aura parcouru 60 lieues, le second 40. La somme est bien égale à 100.

14. PROBLÈME IX. *Une montre marque midi; les deux aiguilles, savoir l'aiguille des heures et celle des minutes, sont actuellement au même point du cadran. On demande dans combien de temps et en quel point du cadran l'aiguille des minutes rencontrera celles des heures?*

Le cadran d'une montre est divisé en 60 parties égales. Dans une heure, l'aiguille des minutes parcourt les 60 divisions du cadran, tandis que celle des heures n'en parcourt que 5. Prenons l'heure pour unité de temps et appelons x le temps cherché; dans le temps x, l'aiguille des heures parcourt $5x$ divisions, et l'aiguille des minutes $60x$; mais, après ce temps, l'aiguille des minutes, ayant rejoint l'aiguille des heures, a parcouru le tour du cadran, c'est-à-dire 60 divisions, plus $5x$ divisions. On a donc l'équation

$$60x = 60 + 5x;$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{60}{55} = \frac{12}{11} = 1^h 5^m + \frac{5^m}{11} = 1^h 5^m 27^s + \frac{3^s}{11}.$$

Ainsi, la première rencontre aura lieu à $1^h 5^m 27^s$ et une fraction $\frac{3}{11}$ de seconde.

La deuxième rencontre aura lieu après un temps égal, c'est-à-dire à $2^h 10^m + \frac{10^m}{11}$; la troisième, encore après un temps égal, c'est-à-dire à $3^h 16^m + \frac{4^m}{11}$, etc. La onzième rencontre aura lieu à minuit, après un intervalle de 12 heures.

15. PROBLÈME X. *Le soleil s'avance chaque jour de l'ouest à l'est de* $59'8'',19$, *la lune de* $13°10'34'',89$. *La lune est actuellement en conjonction avec le soleil. On demande dans combien de temps elle reviendra en conjonction.*

On dit que la lune est en conjonction avec le soleil quand

ces deux astres sont en ligne droite avec la terre et d'un même côté de la terre. C'est le moment de la nouvelle lune. Prenons pour unité de temps le jour et appelons x le temps cherché. Réduisons les arcs en secondes. Le soleil décrivant $3548'',19$ par jour, décrira $3548'',19 \times x$ en x jours; la lune décrivant $47434'',89$ par jour, décrira $47434'',89 \times x$ secondes dans le même temps. Mais la lune, ayant rejoint le soleil, a décrit dans ciel une circonférence entière, c'est-à-dire $360°$ ou $1296000''$, plus l'arc décrit par le soleil. On a donc l'équation

$$47434,89x = 1296000 + 3548,19x.$$

On en déduit

$$x = \frac{1296000}{43886,70} = 29^j\, 12^h 44^m 2^s,7.$$

Ce temps est ce qu'on appelle la durée de la révolution synodique de la lune, ou le mois lunaire.

16. Problème XI. *Combien faut-il mélanger de vin à 45 centimes le litre et de vin à 33 centimes pour faire 150 litres de mélange à 40 centimes le litre?*

Appelons x la quantité du premier vin qu'il faut mettre dans le mélange; celle du second vin sera $150 - x$.

Un litre du premier vin coûtant 45 centimes, x litres coûteront $45x$ centimes; de même $150 - x$ litres du second vin coûteront $33\,(150 - x)$ centimes. Mais, puisqu'un litre du mélange doit revenir à 40 centimes le litre, le mélange entier doit coûter 40×150 ou 6000^c. On a donc l'équation

$$45x + 33(150 - x) = 6000,$$

en prenant le centime pour unité.

Multiplier 33 par $150 - x$ revient à le répéter 150 fois moins x fois, ce qui donne 33×150 ou 4950 moins $33x$. L'équation devient donc

$$45x + 4950 - 33x = 6000,$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{1050}{12} = 87,5 \text{ litres.}$$

En retranchant ce nombre de 150, on a ce qu'il faut prendre du second vin. Ainsi on mélangera 87,5 litres du premier vin avec 62,5 du second.

17. Problème XII. *On a un lingot d'argent pesant* 1245 *grammes au titre* 0,87. *Combien faut-il y ajouter d'un second lingot au titre* 0,95 *pour en élever le titre à* 0,90?

On appelle titre d'un lingot d'or ou d'argent la quantité d'or ou d'argent pur que renferme un gramme du lingot. Appelons x la quantité du second lingot qu'il faut ajouter au premier. Le lingot, formé de l'alliage des deux premiers, pèsera $1245 + x$ grammes.

Un gramme du premier lingot contenant 0,87 d'argent pur, 1245 grammes contiendront $0,87 \times 1245$ ou 1083,15. Un gramme du second lingot contenant 0,95 d'argent pur, x grammes en contiendront $0,95 \times x$. Mais le troisième lingot, pour être au titre 0,90 et peser $1245 + x$ grammes, devra contenir $0,90(1245 + x)$ d'argent pur. On a donc l'équation

$$1083,15 + 0,95x = 0,90(1245 + x).$$

Si l'on multiplie par 100 les deux membres, l'équation devient

$$108315 + 95x = 90(1245 + x),$$

ou

$$108315 + 95x = 112050 + 90x.$$

On en déduit

$$x = 747 \text{ grammes.}$$

18. Problème XIII. *D'après Vitruve, la couronne du roi Hiéron pesait* 7465 *grammes et perdait dans l'eau* 467 *grammes. On sait que l'or perd dans l'eau les* 52 *millièmes de son poids, que l'argent en perd les* 95 *millièmes. Déterminer*

les quantités d'or et d'argent qui entrent dans la composition de la couronne.

On raconte que le roi Hiéron de Syracuse avait fait remettre à un orfévre une certaine quantité d'or pour en faire une couronne. Le travail achevé, la couronne avait bien le poids voulu ; mais le roi, soupçonnant l'orfévre d'avoir gardé une partie de l'or et d'y avoir substitué un égal poids d'argent, consulta Archimède sur le moyen de découvrir la fraude sans endommager la couronne. Un jour qu'Archimède était aux bains, la solution du problème se présenta tout à coup à son esprit. On dit que, transporté de joie, il s'élança hors du bain, et, oubliant qu'il était nu, il traversa les rues de Syracuse en criant : J'ai trouvé, j'ai trouvé (εὕρηκα, εὕρηκα).

Le moyen imaginé par Archimède repose sur ce principe de physique trouvé par lui, savoir : que tout corps plongé dans l'eau y perd une partie de son poids égal au poids du volume d'eau déplacé. Il consiste à déterminer par deux expériences préliminaires combien l'or, plongé dans l'eau, perd de son poids, et combien perd l'argent; puis à déterminer de la même manière combien perd la couronne plongée dans l'eau et à comparer ce résultat aux précédents.

Un gramme d'or perdant 0,052 dans l'eau, 7465 grammes d'or perdent $0{,}052 \times 7465$ ou 388,18. Si la couronne était d'or pur, plongée dans l'eau, elle perdrait donc 388,18 ; mais elle perd 467 grammes; ceci annonce qu'il entre dans sa composition un métal, comme l'argent, moins dense que l'or.

Appelons x la quantité d'argent introduite par l'orfévre; la quantité d'or sera $7465 - x$. Un gramme d'argent perdant 0,095 dans l'eau, x grammes perdront $0{,}095\,x$. De même $7465 - x$ grammes d'or perdront $0{,}052\,(7465 - x)$. La perte éprouvée par les deux quantités d'or et d'argent

devant être égale à la perte 467 grammes éprouvée par la couronne (on suppose que l'alliage des deux métaux a lieu sans contraction ni dilatation), on a l'équation

$$0{,}095x + 0{,}052(7465 - x) = 467.$$

En faisant la multiplication indiquée par la parenthèse, cette équation devient

$$0{,}095x + 388{,}18 - 0{,}052x = 467,$$
$$0{,}043x = 78{,}82,$$

d'où l'on déduit

$$x = 1833 \text{ grammes.}$$

Ainsi l'orfèvre avait substitué 1833 grammes d'argent à un égal poids d'or.

19. Jusqu'ici nous n'avons résolu que des problèmes à une inconnue. Nous allons donner quelques exemples de problèmes à plusieurs inconnues.

Problème XIV. *Pour payer ses ouvriers sur le pied de 3 francs chacun, il manque 8 francs à celui qui les fait travailler. Mais s'il ne leur donnait que 2 francs chacun, il lui resterait 3 francs. Quelle est la somme d'argent et le nombre des ouvriers?*

Désignons par x le nombre des ouvriers et par y la somme d'argent. Pour donner 3 francs à chacun, il faudrait $3x$ francs; mais comme il manque 8 francs, on a l'équation

$$y = 3x - 8.$$

Pour donner 2 francs à chacun, il faut $2x$ francs, et comme il reste 3 francs, on a l'équation

$$y = 2x + 3.$$

On a ainsi deux équations à deux inconnues.

Si, dans la seconde équation, nous remplaçons y par la

quantité égale $3x - 8$ donnée par la première, nous obtenons une équation à une seule inconnue

$$3x - 8 = 2x + 3\,;$$

d'où nous déduisons, en la résolvant par le procédé ordinaire

$$x = 11.$$

Une fois la valeur de x trouvée, on obtient celle de y en remplaçant x par sa valeur 11 dans l'une des deux premières équations, ce qui donne

$$y = 25.$$

Ainsi il y a 11 ouvriers, et la somme d'argent est 25 francs.

20. PROBLÈME XV. *Deux sources, qui coulent uniformément, ont rempli ensemble un réservoir de 18 mètres cubes, en coulant l'une pendant 7 heures, l'autre pendant 2 heures. Les deux mêmes sources ont rempli un second réservoir de 22 mètres cubes, la première coulant pendant 3 heures, la seconde pendant 5 heures. On demande quelle est la dépense de chacune de ces sources.*

Prenons pour unité de volume le mètre cube et appelons x et y les volumes d'eau que fournissent les deux sources par heure, La quantité d'eau versée par la première en 7 heures est $7x$, celle versée par la seconde en 2 heures est $2y$; le premier réservoir ayant été rempli de cette manière, on a l'équation

$$7x + 2y = 18.$$

De même $3x$ et $5y$ sont les quantités d'eau versées par les deux sources en 3 heures et en 5 heures; le second réservoir ayant été rempli de cette façon, on a la seconde équation

$$3x + 5y = 22.$$

Pour résoudre ces deux équations, tirons de la première la

valeur de y, comme si x était connue, ce qui donne

$$y=\frac{18-7x}{2},$$

et substituons cette valeur à la place de y dans la seconde équation, nour aurons l'équation

$$3x+5\left(\frac{18-7x}{2}\right)=22,$$

qui ne renferme plus qu'une seule inconnue x.

Si l'on multiplie par 5 le numérateur de la fraction, cette équation devient

$$3x+\frac{90-35x}{2}=22;$$

en chassant le dénominateur et résolvant, on trouve

$$x=\frac{46}{29}.$$

Pour avoir ensuite la valeur de y, on remplacera x par sa valeur $\frac{46}{29}$ dans l'équation

$$y=\frac{18-7x}{2},$$

ce qui donne

$$y=\frac{100}{29}.$$

On vérifierait que les nombres fractionnaires $\frac{46}{29}$ et $\frac{100}{29}$, mis à la place de x et y satisfont bien aux deux équations du problème. Si l'on réduit en décimales, on trouve que les deux sources dépensent par heure, la première 1586 litres, la seconde 3448 litres, en négligeant les fractions de litre.

Résolution de deux équations à deux inconnues.

21. Remarquons la méthode que nous avons suivie pour résoudre deux équations à deux inconnues. Nous avons tiré

de l'une des équations la valeur de l'une des inconnues, par exemple de y, comme si l'autre x était connue, et nous avons substitué cette valeur dans l'autre équation; nous avons obtenu de la sorte une équation à une seule inconnue x, que nous avons résolue par le procédé ordinaire.

Appliquons encore cette méthode à quelques exemples. Soient les deux équations

$$5x - 3y = 14,$$
$$7x + 6y = 40.$$

De la première, en faisant passer le terme $3y$ dans le second membre, le terme 14 dans le premier, et divisant par 3, on tire

$$y = \frac{5x - 14}{3}.$$

Substituons cette valeur à la place de y dans la seconde équation, nous aurons l'équation à une inconnue

$$7x + 6\,\frac{5x - 14}{3} = 40.$$

Ici le diviseur 3 disparaît, à cause du multiplicateur 6, et l'équation devient

$$7x + 2(5x - 14) = 40,$$

ou

$$7x + 10x - 28 = 40;$$

d'où

$$x = 4.$$

En portant cette valeur de x dans l'équation

$$y = \frac{5x - 14}{3},$$

on trouve

$$y = 2.$$

Vérification. Ces deux valeurs 4 et 2, mises à la place de x et de y, rendent les deux premiers membres des équa-

tions proposées égaux respectivement à 14 et à 40, et les équations sont satisfaites.

Soient encore les deux équations

$$13x - 9y = 17,$$
$$11x - 15y = 7.$$

De la première, résolue par rapport à y, nous tirons

$$y = \frac{13x - 17}{9}.$$

Si, afin d'éviter le signe — devant le terme en y dans la seconde équation, on fait passer ce terme dans le second membre, cette équation devient

$$11x = 7 + 15y;$$

en substituant à la place de y sa valeur déduite de la première équation, on a

$$11x = 7 + \frac{15(13x - 17)}{9}.$$

On peut simplifier en divisant par 3 le numérateur et le dénominateur de la fraction, ce qui donne

$$11x = 7 + \frac{5(13x - 17)}{3},$$

ou

$$11x = 7 + \frac{65x - 85}{3}.$$

Multiplions par 3, l'équation devient

$$33x = 21 + 65x - 85;$$

d'où l'on tire

$$x = 2.$$

Cette valeur, portée dans l'équation

$$y = \frac{13x - 17}{9},$$

donne

$$y = 1.$$

Nous verrons plus tard que la précaution que nous avons

prise de faire passer le terme $15y$ dans le second membre, afin d'éviter le signe —, n'est pas nécessaire.

22. Problème XVI. *On a formé trois mélanges de froment, de seigle et d'orge. Le premier contient* 10 *mesures de froment,* 30 *de seigle et* 20 *d'orge. Il revient à* 230 *francs. Le second contient* 12 *mesures de froment,* 15 *de seigle, et* 6 *d'orge; il revient à* 138 *francs. Le troisième contient* 4 *mesures de froment,* 10 *de seigle et* 5 *d'orge, et revient à* 75 *francs. Quel est le prix de la mesure de froment, de seigle et d'orge?*

Appelons x, y, z, le prix d'une mesure de chaque denrée. Une mesure de froment valant x francs, 10 mesures vaudront 10 fois plus, c'est-à-dire $10x$; ainsi la quantité de froment contenue dans le premier mélange coûtera $10x$; de même la quantité de seigle coûtera $30y$, la quantité d'orge $20z$; comme le mélange coûte 230 francs, on a l'équation

$$10x + 30y + 20z = 230.$$

On obtiendra de même les équations

$$\begin{aligned} 12x + 15y + 6z &= 138, \\ 4x + 10y + 5z &= 75. \end{aligned}$$

Nous remarquons d'abord que l'on peut simplifier la première équation en divisant tous ses termes par 10, et la seconde en divisant tous ses termes par 3, de sorte que ces trois équations s'écrivent

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 23, \\ 4x + 5y + 2z &= 46, \\ 4x + 10y + 5z &= 75. \end{aligned}$$

Il s'agit de résoudre ces trois équations à trois inconnues. La méthode est la même que celle que nous avons suivie pour deux équations à deux inconnues. De la première équation résolue par rapport à x, comme si l'on connaissait y et z, on tire

$$x = 23 - 3y - 2z.$$

Si nous mettons à la place de x cette valeur dans les deux autres équations, nous obtiendrons deux équations à deux inconnues

$$4(23-3y-2z)+5y+2z=46,$$
$$4(23-3y-2z)+10y+5z=75.$$

Ces équations, simplifiées, s'écrivent

$$7y+6z=46,$$
$$2y+3z=17.$$

De la dernière, nous tirons

$$z=\frac{17-2y}{3};$$

substituant dans la précédente, nous avons une équation à une inconnue

$$7y+6\frac{17-2y}{3}=46,$$

plus simplement

$$7y+2(17-2y)=46;$$

d'où

$$y=4.$$

En portant cette valeur de y dans l'équation

$$z=\frac{17-2y}{3},$$

on trouve

$$z=3.$$

En portant ces valeurs de y et de z dans l'équation

$$x=23-3y-2z,$$

on trouve enfin

$$x=5.$$

Ainsi la mesure de froment coûte 5 francs, celle de seigle 4 francs, celle d'orge 3 francs.

Emploi des lettres comme moyen de généralisation.

23. Nous avons expliqué la formation d'une écriture abrégée qui facilite beaucoup le raisonnement et qui con-

stitue, en quelque sorte, la langue des mathématiques. Elle présente un autre avantage non moins important, qui est de généraliser la solution des problèmes. Il suffit, pour cela, de représenter par des lettres, non-seulement les quantités inconnues, mais encore les quantités connues, et nous avons déjà dit qu'afin d'éviter la confusion on se sert des premières lettres de l'alphabet pour les quantités connues, des dernières pour les quantités inconnues. De cette manière les raisonnements porteront non plus sur des nombres particuliers, mais sur des quantités quelconques, et l'on résoudra ainsi, à la fois, toutes les questions de même espèce. Quelques exemples feront bien comprendre cette nouvelle propriété de l'algèbre.

24. Reprenons le problème I. Partager 50 francs entre trois personnes, de manière que la première ait 6 francs de plus que la seconde, la seconde 4 francs de plus que la troisième.

Nommant x la troisième part, nous avons dit que les deux autres parts sont exprimées par $x+4$ et $x+4+6$; écrivant que la somme des trois parts est égale à 50, nous avons obtenu l'équation

$$3x+14=50,$$

que nous avons résolue, et d'où nous avons déduit

$$x=12.$$

Si l'on change les nombres qui entrent dans l'énoncé du problème, si l'on demande, par exemple, de partager 64 francs entre trois personnes, de manière que la première ait 5 francs de plus que la seconde, la seconde 7 francs de plus que la troisième, il est clair qu'il faudra recommencer exactement les mêmes raisonnements.

Ainsi, nommant la troisième part . . . . . x,
la seconde sera . . . . $x+7$,
la première . . . . $x+7+5$.

Écrivant que la somme des trois parts est égale au nombre à partager 64, on aura l'équation

$$3x + 19 = 64,$$

que l'on résoudra de la même manière, et d'où l'on déduira

$$x = 15.$$

On a dû naturellement se demander si l'on ne pourrait pas résoudre à la fois toutes les questions de ce genre, de manière qu'on ne soit pas obligé de recommencer les mêmes raisonnements dans chaque exemple particulier. Or, ceci est bien facile. Représentons par la lettre a la somme à partager, par b l'excès de la première part sur la seconde, par c l'excès de la seconde sur la troisième, et raisonnons sur ces lettres comme sur des nombres donnés.

Nommant la troisième part . . . . x,
la seconde sera . . . . $x+c$,
la première . . . . $x+c+b$.
Écrivant que la somme des trois parts est égale au nombre à partager a, nous aurons l'équation

$$3x + 2c + b = a.$$

Retranchons des deux membres les quantités b et $2c$, l'équation devient

$$3x = a - b - 2c;$$

divisant par 3, nous trouvons

$$x = \frac{a - b - 2c}{3}.$$

C'est là ce qu'on appelle une *formule*. Elle indique quelles opérations il faut effectuer sur les quantités connues pour en déduire la valeur de l'inconnue. Cette formule dit que pour trouver la troisième part, il faut, du nombre à partager a, retrancher l'excès b de la première part sur la seconde et deux fois l'excès c de la seconde sur la troisième, puis diviser le résultat par 3.

Quand on veut appliquer à un exemple, on remplace dans la formule les lettres par leurs valeurs particulières et l'on effectue les calculs. Ainsi, dans le premier exemple, on fera $a = 50$, $b = 6$, $c = 4$; la formule donne

$$x = \frac{50 - 6 - 4 \times 2}{3};$$

d'où, en effectuant les calculs,

$$x = 12.$$

C'est bien la valeur trouvée directement.

25. Généralisons de la même manière le problème VIII, et pour cela représentons par a la distance des deux villes, par b la vitesse du premier courrier, c'est-à-dire le nombre de lieues qu'il parcourt en une heure, par c la vitesse du second. Nous prendrons encore pour inconnue le temps pendant lequel marchent les deux courriers jusqu'à leur rencontre. Nommons x ce temps. Le premier courrier, faisant b lieues à l'heure, parcourra en x heures bx lieues; le second, faisant c lieues à l'heure, parcourra, dans le même temps, cx lieues. Mais la somme des chemins parcourus par les deux courriers doit être égale à la distance totale a lieues. Nous avons donc l'équation

$$bx + cx = a,$$

que l'on peut écrire

$$(b + c)x = a,$$

la parenthèse indiquant que la quantité $b + c$ est multipliée par x. En divisant les deux membres de l'équation par $b + c$, on a

$$x = \frac{a}{b + c}.$$

Cette formule dit que, pour trouver après combien d'heures a lieu la rencontre, il faut diviser la distance des deux points de départ par la somme des chemins que parcourent les deux courriers en une heure.

On l'appliquera à l'exemple considéré, en faisant $a=100$, $b=3$, $c=2$, ce qui donne

$$x=\frac{100}{3+2}=\frac{100}{5}=20.$$

26. Généralisons encore le problème VII, que nous poserons ainsi : l'âge d'un père est a années, l'âge du fils b. Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il n fois l'âge du fils ?

Désignons par x le nombre d'années cherché. Après ce temps l'âge du père sera $a+x$, l'âge du fils $b+x$. Comme l'âge du père doit être n fois l'âge du fils, on a l'équation

$$a+x=(b+x)\times n,$$

ou

$$a+x=nb+nx.$$

Par la transposition des termes, cette équation devient

$$a-nb=nx-x,$$

ou

$$a-nb=x\times(n-1);$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{a-nb}{n-1}.$$

Si l'on applique à l'exemple considéré, on fera $a=40$, $b=10$, $n=3$; la formule donne

$$x=\frac{40-10\times 3}{3-1}=\frac{40-30}{2}=5.$$

27. Cette introduction suffit, je pense, pour faire comprendre au lecteur le but de l'algèbre, et lui donner une idée de la méthode à laquelle les mathématiciens ont donné le nom d'*analyse*. Elle offre d'ailleurs l'avantage de mettre les commençants en état de résoudre immédiatement un grand nombre de questions ; nous en proposons ici quelques-unes comme exercices. Nous allons maintenant revenir

sur nos pas et exposer en détail et avec ordre le mécanisme du calcul algébrique.

Questions à résoudre.

PROBLÈME XVII. Trois personnes ont ensemble 112 ans; la deuxième a 8 ans de plus que la plus jeune; la troisième a autant que les deux autres. Quel est l'âge de chacune d'elles?

Réponse. La plus jeune a 24 ans, la deuxième 32, la troisième 56.

PROBLÈME XVIII. Faire 53 francs avec 16 pièces de 2 et de 5 francs.

Réponse. On prendra 9 pièces de 2 francs et 7 de 5 francs.

PROBLÈME XIX. Un homme en arrivant à Paris, a dépensé le premier jour le $\frac{1}{5}$ de son argent, le second jour le $\frac{1}{4}$ du reste, le troisième jour le $\frac{1}{3}$ du reste; il n'a plus alors que 48 francs. Combien avait-il d'argent?

Réponse. 120 francs.

PROBLÈME XX. Quelle est la fraction telle que, si l'on ajoute 1 à son numérateur, elle devienne égale à $\frac{1}{3}$ et si l'on ajoute 1 à son dénominateur, elle devient égale à $\frac{1}{4}$?

Réponse. $\frac{4}{15}$.

PROBLÈME XXI. Un bassin est alimenté par deux tuyaux de conduite. Dans une première expérience, le premier ayant été ouvert pendant 4 heures, le second pendant 5 heures, on a obtenu 40 mètres cubes d'eau. Dans une seconde expérience, le premier ayant été ouvert pendant 6 heures, le second pendant 5 heures et demie, on a obtenu 50 mètres cubes. Quelle est la quantité d'eau que chaque tuyau fournit en une heure?

Réponse. Le premier tuyau dépense 6875 litres d'eau par heure, le second 2500.

PROBLÈME XXII. Une personne a des jetons dans ses deux mains. Si elle en passe un de la droite dans la gauche, il y en a autant dans les deux mains. Mais si elle en passe un de la gauche dans la droite, celle-ci en contient le double.

Réponse. La main droite contient 7 jetons, la gauche 5.

PROBLÈME XXIII. Une personne a décidé dans son testament que sa fortune serait distribuée entre quatre personnes, de manière que la deuxième ait deux fois autant que la première, la troisième autant que les deux premières et la quatrième autant que la deuxième et la troisième. La fortune totale s'élève à 11000 francs. Quelle est la part de chacune d'elles?

Réponse. La première aura 1000 francs, la deuxième 2000, la troisième 3000 et la quatrième 5000.

PROBLÈME XXIV. Trouver le nombre dont le double ajouté à 24 surpasse 80 autant que 100 surpasse ce nombre.

Réponse. 52.

PROBLÈME XXV. Partager 75 en deux parties telles, que 3 fois la plus grande surpasse 7 fois la plus petite de 15.

Réponse. Ces deux parties sont 54 et 21.

PROBLÈME XXVI. De deux tonneaux égaux, après avoir tiré de l'un 45 litres et de l'autre 150, il reste deux fois plus de vin dans le premier que dans le second. Combien chaque tonneau contenait-il de litres?

Réponse. 255 litres.

PROBLÈME XXVII. Un maître ayant proposé 12 problèmes à son élève, convient de lui donner 25 centimes pour chaque problème résolu, à la condition que l'élève payera 10 centimes pour chaque problème non résolu. Le compte fait, le maître doit à l'élève 1 franc 25 centimes. Combien celui-ci a-t-il résolu de problèmes?

Réponse. L'élève a résolu 7 problèmes.

LIVRE PREMIER.

CALCUL ALGÉBRIQUE (*).

CHAPITRE PREMIER.

PRÉLIMINAIRES.

Définitions.

28. Toute expression algébrique indique une série d'opérations à effectuer sur des quantités représentées par des lettres. L'expression est un *polynôme* si elle est composée de plusieurs parties séparées les unes des autres par le signe + ou par le signe —. Ces diverses parties sont les *termes* du polynôme. Dans le cas contraire, c'est un *monôme*.

On donne spécialement le nom de *binôme* à tout polynôme composé de deux termes, celui de *trinôme* à tout polynôme composé de trois termes, etc.

Ainsi les expressions

$$5a^3b^2c, \qquad \frac{4a^2-3b^2}{a+b}, \qquad \sqrt{a^2+b^2},$$

sont des monômes.

(*) La première leçon du programme pour la classe de seconde contient le paragraphe suivant: *Emploi des lettres et des signes comme moyen d'abréviation et de généralisation.* Nous avons traité cette question avec beaucoup de développement dans le chapitre d'introduction. Nous y renvoyons le lecteur, en lui indiquant spécialement les numéros 2, 3, 23, 24.

Les expressions

$$3a^2 - 5ab, \qquad a + 4\sqrt{ab}, \qquad 7a - \frac{a^2 + b^2}{a - b},$$

sont des binômes.

Les expressions

$$a^2 - 2ab + 3b^2, \qquad 2a + 3\sqrt{ab} - 5b,$$

sont des trinômes.

L'expression

$$a^4 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 7ab^3 - 2b^4$$

est un polynôme à cinq termes.

29. Une expression algébrique qui ne contient pas le signe $\sqrt{}$ est dite *rationnelle;* par opposition, elle est dite *irrationnelle* si elle contient le signe $\sqrt{}$.

L'expression

$$\frac{4a^2 - 3b^2}{a + b}$$

est rationnelle, mais l'expression

$$a + \sqrt{ab}$$

est irrationnelle.

30. Une expression rationnelle est *entière* si elle ne contient pas le signe de la division; elle est *fractionnaire* si elle le contient.

L'expression

$$a^2 - 2ab + b^2$$

est un polynôme entier.

L'expression

$$a + \frac{a^2 - b^2}{2c} - 4b$$

est fractionnaire.

31. Tout monôme entier est de la forme

$$7a^3b^2c.$$

Prononcez. sept a trois, b deux, c. Il faut distinguer dans ce monôme les lettres a, b, c qui le constituent, les exposants 3, 2, 1 dont ces lettres sont affectées (la lettre c, qui n'a pas d'exposant, est censée affectée de l'exposant 1; et en effet, la quantité c est la première puissance de c) et le multiplicateur 7 placé au commencement. Ce multiplicateur porte spécialement le nom de *coefficient*, il indique que la quantité a^3b^2c est répétée 7 fois.

Le monôme

$$a^3b^2c,$$

qui n'a pas de coefficient, est censé avoir le coefficient 1; en effet, on a ici *une fois* la quantité a^3b^2c.

32. On appelle *degré* d'un monôme entier par rapport à une lettre l'exposant de cette lettre; degré par rapport à plusieurs lettres la somme des exposants de ces lettres.

Ainsi le monôme

$$7a^3b^2c$$

est du troisième degré par rapport à a, du second degré par rapport à b, du premier degré par rapport à c. Il est du cinquième degré par rapport aux deux lettres a et b, du sixième degré par rapport aux trois lettres a, b, c.

On appelle degré d'un polynôme par rapport à une lettre le degré du terme dans lequel cette lettre est affectée du plus fort exposant. Ainsi le polynôme

$$5x^3 - 4x^2 + 3x - 6$$

est du troisième degré par rapport à x.

Lorsque tous les termes d'un polynôme sont du même degré par rapport aux différentes lettres qu'il renferme, on dit qu'il est *homogène*. Ainsi le polynôme

$$2a^3 - 5a^2b + 4ab^2 - 6b^3$$

est homogène et du troisième degré, parce que tous ses

termes sont du troisième degré par rapport aux deux lettres a et b qui entrent dans ce polynôme.

Un terme qui ne contient pas une lettre est regardé comme étant du degré o par rapport à cette lettre. Ainsi le premier terme $2a^3$, qui ne contient pas la lettre b, sera du degré o par rapport à b. Le dernier, qui ne contient pas la lettre a, sera du degré o par rapport à a; de cette façon, on peut dire que dans tous les termes la somme des exposants égale 3.

33. Un polynôme indique une série d'additions et de soustractions à effectuer.

Ainsi le polynôme

$$a+b-c+d-e-f$$

indique qu'il faut ajouter la quantité a, puis la quantité b, ensuite retrancher c, ajouter d, retrancher e et encore f.

Les termes affectés du signe $+$ sont dits *positifs*; les termes affectés du signe $-$ sont dits *négatifs*. Le terme a, qui, placé au commencement, n'a pas de signe, est positif, et doit être considéré comme affecté du signe $+$.

Il est évident que la *série des opérations indiquées par un polynôme revient à ajouter la somme des termes positifs et à retrancher la somme des termes négatifs.*

Pour éclaircir ceci par un exemple, supposons que le polynôme représente les opérations d'un négociant dans le courant de la journée, les termes positifs étant les recettes, les termes négatifs les dépenses. Au commencement de la journée, le négociant avait en caisse une certaine somme d'argent; il a fait d'abord une recette a et une seconde recette b; puis il a payé c; après quoi il a reçu d, il a payé e et encore f. Il est évident qu'à la fin de la journée son avoir a été augmenté de la somme des recettes et diminué de la somme des dépenses.

Soit le polynôme numérique

$$12 + 7 - 15 + 20 - 6 - 2.$$

La somme des termes positifs est 39, celle des termes négatifs 23. Il faut ajouter 39 et retrancher 23, ce qui revient à ajouter 16, excès de la première somme sur la seconde. Dans ce cas, la valeur du polynôme est positive; on l'écrit $+16$.

Lorsque la somme des termes négatifs l'emporte sur celle des termes positifs, le polynôme n'en conserve pas moins une signification très-nette. Soit le polynôme

$$5 - 3 + 7 - 10 + 4 - 9.$$

Il faut ajouter 16, somme des termes positifs, et retrancher 22, somme des termes négatifs; ce qui revient à retrancher 6, excès de la seconde somme sur la première. Dans ce cas, la valeur du polynôme est négative; on l'écrit -6.

Deux polynômes, et en général deux expressions algébriques, sont égales, lorsqu'elles ont la même valeur affectée du même signe.

34. Il résulte clairement de ce qui précède que l'*on peut changer à volonté l'ordre des termes d'un polynôme.* Car, quel que soit l'ordre des termes, on a toujours finalement la même somme à ajouter et la même somme à retrancher.

Ainsi les termes du polynôme

$$a + b - c + d - e - f$$

peuvent être écrits dans tel ordre qu'on voudra, par exemple dans l'ordre suivant

$$-e + d - f + a - c + b.$$

Il n'y a aucun inconvénient à commencer par un terme

négatif. Pour revenir à notre comparaison, cela signifie que le négociant commence par payer e, qu'il reçoit ensuite d, qu'il paye f, etc. Or rien n'empêche de supposer que le négociant a dans sa caisse, au commencement de la journée, une assez grande somme d'argent pour effectuer les payements.

Termes semblables.

35. On dit que deux termes sont *semblables* lorsqu'ils sont composés des mêmes lettres affectées des mêmes exposants, et qu'ils ne diffèrent que par les coefficients et les signes.

Soit le polynôme

$$5a^3 - 4a^2b + 7ab^2 + a^2b - 2a^3 - 8ab^2 + a^3 - 12ab^2 + 3a^2b.$$

Nous voyons d'abord les trois termes semblables

$$5a^3 - 2a^3 + a^3,$$

que l'on peut réduire et remplacer par le seul terme $+4a^3$. En effet, la quantité a^3 doit être ajoutée 5 fois et encore 1 fois, c'est-à-dire 6 fois, et retranchée 2 fois, ce qui revient à l'ajouter 4 fois.

Nous trouvons ensuite les termes semblables

$$-4a^2b + a^2b + 3a^2b$$

qui se détruisent. Car la quantité a^2b doit être ajoutée 3 fois et encore 1 fois, c'est-à-dire 4 fois, et retranchée 4 fois.

Il reste les termes semblables

$$+7ab^2 - 8ab^2 - 12ab^2,$$

qui se réduisent à $-13ab^2$. Car la quantité ab^2 doit être ajoutée 7 fois et retranchée 8 fois et encore 12 fois, c'est-à-dire 20 fois, ce qui revient à la retrancher 13 fois.

Ainsi le polynôme proposé s'écrit plus simplement

$$4a^3 - 13ab^2.$$

Dans la pratique, on opère très-rapidement cette réduction des termes semblables. Soient les termes semblables

$$+7ab^2-8ab^2-12ab^2;$$

faisant abstraction de la quantité ab^2, on ne considère que les coefficients et les signes

$$+7-8-12,$$

et l'on calcule la valeur -13 de ce polynôme numérique; puis on écrit $-13ab^2$ au résultat, et l'on barre les termes réduits.

Ordonner un polynôme.

36. Après avoir réduit les termes semblables, on a coutume d'ordonner le polynôme, soit par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre, soit par rapport aux puissances croissantes, c'est-à-dire que l'on écrit les termes dans un ordre tel que les exposants de cette lettre aillent, soit en diminuant, soit en augmentant.

Ainsi le polynôme

$$5x^3-4x^2+3x-6$$

est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x. Ce même polynôme, écrit en ordre inverse,

$$-6+3x-4x^2+5x^3,$$

sera ordonné par rapport aux puissances croissantes. Le terme -6, qui ne contient pas la lettre x, sera regardé comme étant du degré 0.

Quand un polynôme contient des termes de tous les degrés, à partir du degré le plus élevé, on dit qu'il est *complet.* Le polynôme étant supposé ordonné par rapport aux puissances croissantes, la série des exposants commence à zéro, et s'élève jusqu'au degré du polynôme inclusivement. Il y

a donc autant de termes qu'il y a d'unités dans le degré p us un. Ainsi le polynôme précédent est un polynôme complet du troisième degré, et il renferme quatre termes.

Lorsqu'un polynôme, contenant deux lettres, est homogène, si on l'ordonne par rapport aux puissances décroissantes de l'une d'elles, il sera en même temps ordonné par rapport aux puissances croissantes de l'autre ; car la somme des exposants des deux lettres étant la même dans tous les termes, si les exposants de l'une d'elles vont en diminuant, ceux de l'autre iront nécessairement en augmentant. Ainsi le polynôme homogène

$$2a^3 - 5a^2b + 4ab^2 - 6b^3,$$

qui a été ordonné par rapport aux puissances décroissantes de a, se trouve en même temps ordonné par rapport aux puissances croissantes de b.

CHAPITRE II.

ADDITION ET SOUSTRACTION.

Addition.

37. Proposons-nous d'ajouter à un premier polynôme un second polynôme ; nous supposons que ce second polynôme ait une valeur positive, c'est-à-dire que la somme des termes positifs l'emporte sur celle des termes négatifs. Ajouter ce polynôme, c'est ajouter sa valeur, en d'autres termes, c'est ajouter l'excès de la somme de ses termes positifs sur la somme des termes négatifs. Mais ajouter cette différence revient évidemment à ajouter les termes positifs et retrancher les termes négatifs, ce qui se fera en écrivant à la suite du premier polynôme tous les termes du second, chacun avec son signe. Ainsi :

Règle. *A un polynôme on en ajoute un autre, en écrivant à la suite du premier successivement tous les termes du second, chacun avec son signe.*

38. Exemple. Additionnez les polynômes

$$3a^4 - 5a^3b + 7a^2b^2 + 4ab^3 - b^4$$
$$-2a^4 - 3a^3b + 8a^2b^2 - 7ab^3 + 2b^4,$$
$$6a^4 - 2a^3b - 15a^2b^2 + 6ab^3 - 2b^4.$$

Imaginons que l'on ait écrit tous les termes de ces trois polynômes, les uns à la suite des autres, chacun avec son signe, en affectant du signe + le premier terme $6a^4$ du

troisième polynôme; réduisons les termes semblables, nous obtiendrons le polynôme

$$7a^4 - 10a^2b + 3ab^3 - b^4.$$

39. Remarque. On peut grouper dans une parenthèse plusieurs termes d'un polynôme, en conservant à chaque terme son signe et mettant le signe + devant la parenthèse.

Par exemple, le polynôme

$$a - b + c - d - e + f$$

peut être écrit sous la forme

$$a - b + (c - d - e + f).$$

En effet, la parenthèse, précédée du signe +, indique l'addition du polynôme; si l'on effectue cette addition d'après la règle énoncée, on reproduit évidemment le polynôme proposé.

Il n'y a pas à s'inquiéter de savoir si, parmi les termes mis entre parenthèses, la somme des termes positifs est plus grande que celle des termes négatifs, pourvu que l'on étende aux polynômes négatifs la règle démontrée pour l'addition des polynômes positifs.

Ainsi nous dirons qu'ajouter un polynôme quelconque, c'est écrire tous ses termes, chacun avec son signe.

40. Il convient aussi d'appliquer la même règle à un terme pris isolément, et nous dirons qu'ajouter une quantité affectée du signe + ou du signe —, c'est l'écrire avec son signe. Soit, par exemple, le polynôme

$$15 - 3 + 6 - 9 - 4 + 2.$$

Si nous mettons les quatre derniers termes entre parenthèses, nous écrirons ce polynôme sous la forme

$$15 - 3 + (6 - 9 - 4 + 2).$$

La partie mise entre parenthèses est négative; mais ceci n'offre aucun inconvénient, puisqu'en effectuant l'addition d'après la règle énoncée, on reproduit le polynôme proposé. Remplaçons maintenant le polynôme entre parenthèses par sa valeur — 5; il s'agit d'ajouter — 5; pour cela nous écrirons — 5, ce qui donne

$$15 - 3 - 5.$$

Et en effet, dans le polynôme proposé, la partie

$$+6-9-4+2,$$

mise entre parenthèses, signifie qu'il faut ajouter 8 et retrancher 13, c'est-à-dire retrancher 5.

41. D'après cette manière de voir, l'*addition algébrique* ne comporte plus nécessairement l'idée d'augmentation. Si l'on ajoute une quantité positive, il y a effectivement augmentation; mais si l'on ajoute une quantité négative, il y a au contraire diminution. Ajouter — 5, c'est en réalité retrancher 5.

Il résulte de là que l'on peut considérer un polynôme comme étant la *somme algébrique* de tous ses termes, puisque l'addition consiste à les écrire les uns à la suite des autres, chacun avec son signe. Cette manière d'envisager un polynôme est très-utile dans les applications.

Soustraction.

42. La soustraction est l'opération inverse de l'addition. D'une quantité en retrancher une autre, c'est en trouver une troisième telle qu'en y ajoutant la seconde on reproduise la première.

Supposons que du polynôme

$$a-b+c$$

on veuille retrancher le polynôme

$$d - e - f + g.$$

Je dis qu'on obtiendra le résultat demandé en écrivant à la suite du premier polynôme tous les termes du second, chacun avec un signe contraire, ce qui donne

$$a - b + c - d + e + f - g.$$

En effet, si à ce troisième polynôme, nous ajoutons le second, nous avons

$$a - b + c - d + e + f - g + d - e - f + g,$$

ou, simplement,

$$a - b + c,$$

en remarquant que les termes $-d$ et $+d$ se détruisent, de même que les termes $+e$, et $-e$, etc. C'est précisément le premier polynôme. Ainsi :

RÈGLE. *Pour retrancher d'un polynôme un autre polynôme, on écrit à la suite du premier successivement tous les termes du second, en changeant le signe de chacun d'eux.*

43. EXEMPLE. Du polynôme

$$5a^3 - 4a^2b - 6ab^2 + b^3,$$

retrancher le polynôme

$$a^3 - 7a^2b + 2ab^2 - 5b^3.$$

Écrivons à la suite du premier polynôme tous les termes du second, en changeant les signes, nous aurons

$$5a^3 - 4a^2b - 6ab^2 + b^3 - a^3 + 7a^2b - 2ab^2 + 5b^3,$$

et, en réduisant les termes semblables,

$$4a^3 + 3a^2b - 8ab^2 + 6b^3.$$

44. REMARQUE. On peut grouper, dans une parenthèse précédée du signe —, plusieurs termes d'un polynôme, en

ayant soin de changer les signes de tous les termes que l'on met dans la parenthèse.

Par exemple, le polynôme

$$a+b-c+d-e+f-g$$

peut être écrit sous la forme

$$a+b-(c-d+e-f+g).$$

En effet, la parenthèse, précédée du signe —, indique la soustraction d'un polynôme; or, si l'on effectue cette soustraction d'après la règle énoncée, on reproduit évidemment le polynôme proposé.

Il n'y a pas à s'inquiéter de savoir si, parmi les termes mis entre parenthèses, la somme des termes positifs est plus grande ou plus petite que la somme des termes négatifs; car la règle de l'addition ayant été établie d'une manière générale, celle de la soustraction, qui s'en déduit, a le même degré de généralité; elle est vraie dans tous les cas, que la valeur du polynôme soit positive ou négative, qu'il comprenne un seul terme ou plusieurs. Ainsi, retrancher une quantité affectée d'un certain signe, c'est l'écrire avec un signe contraire.

Soit, par exemple, le polynôme

$$3-5-4+9-6+8.$$

Si nous mettons dans une parenthèse, précédée du signe —, les quatre derniers termes, en changeant leurs signes, nous écrirons ce polynôme sous la forme

$$3-5-(4-9+6-8).$$

La partie mise entre parenthèses est négative, mais ceci n'offre aucun inconvénient, puisqu'en effectuant la soustraction d'après la règle énoncée, on reproduit le polynôme proposé. Si nous remplaçons le polynôme entre parenthèses par sa valeur -7, nous avons à retrancher -7, ce qui se

fait en changeant le signe de cette quantité, c'est-à-dire en écrivant $+7$; nous aurons donc

$$3-5+7.$$

Et en effet, dans le polynôme proposé, la partie

$$-4+9-6+8,$$

mise entre parenthèses, signifie qu'il faut ajouter 17 et retrancher 10, c'est-à-dire ajouter 7.

45. De même que l'addition algébrique ne comporte plus nécessairement l'idée d'augmentation, la ***soustraction algébrique*** ne comporte plus nécessairement l'idée de diminution. Si l'on retranche une quantité positive, il y a effectivement diminution; mais si l'on retranche une quantité négative, il y a au contraire augmentation. Retrancher -7, c'est en réalité ajouter 7.

En résumé, si l'on considère les quantités comme affectées des signes $+$ ou $-$, l'addition consiste à les écrire avec leurs signes, la soustraction à les écrire avec des signes contraires.

CHAPITRE III.

MULTIPLICATION.

---

46. Je rappelle d'abord quelques principes qui nous seront utiles. On sait que, dans un produit de plusieurs facteurs, on peut changer l'ordre des facteurs et les grouper à volonté sans changer la valeur du produit. On sait aussi que multiplier par un produit de plusieurs facteurs revient à multiplier successivement par chacun des facteurs. Ces principes ont été démontrés en arithmétique pour des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires; on peut donc les appliquer en algèbre, où les lettres représentent des nombres quelconques.

47. ***Multiplication de deux puissances d'un même nombre.*** Soit à multiplier a^m par a^n. Multiplier par a^n revient à multiplier successivement par n facteurs égaux à a, puisque a^n désigne le produit de n facteurs égaux à a; d'autre part, a^m désigne le produit de m facteurs égaux à a; on a donc le produit de $m+n$ facteurs égaux à a, ce qu'on écrit a^{m+n}. Ainsi,

$$a^m \times a^n + a^{m+n}.$$

Par exemple,

$$a^4 \times a^3 = a^7.$$

Règle. *On multiplie des puissances d'un même nombre en ajoutant les exposants.*

Une lettre qui n'a pas d'exposant est censée affectée de l'exposant 1. Ainsi,

$$a^4 \times a = a^5.$$

48. *Multiplication de deux monômes entiers.* Soit à faire le produit des monômes $4a^3b^2c^4d$ et $3a^2bc^3e^4$.

Chacun de ces monômes exprime un produit de plusieurs facteurs; pour multiplier le premier produit par le second, il suffit de le multiplier successivement par chacun des facteurs du second, ce qui donne pour le produit demandé

$$4\times a^3\times b^2\times c^4\times d\times 3\times a^2\times b\times c^3\times e^4.$$

Si l'on groupe les facteurs de la manière suivante

$$4\times 3\times(a^3\times a^2)\times(b^2\times b)\times(c^4\times c^3)\times d\times e^4,$$

et si l'on effectue les produits indiqués dans les parenthèses, on a

$$12\times a^5\times b^3\times c^7\times d\times e^4;$$

ce qui s'écrit plus simplement

$$12a^5b^3c^7de^4.$$

Ainsi,

$$4a^3b^2c^4d\times 3a^2bc^3e^4 = 12a^5b^3c^7de^4.$$

RÈGLE. *Pour multiplier deux monômes entiers, on multiplie les coefficients, on ajoute les exposants des mêmes lettres, et l'on écrit avec leurs exposants les lettres différentes.*

49. ***Multiplication d'un polynôme par un nombre quelconque.***

1° Proposons-nous d'abord de multiplier un polynôme

$$a-b+c-d$$

par un nombre entier m. Il s'agit de répéter le polynôme m fois, c'est-à-dire d'additionner m polynômes égaux au polynôme multiplicande. Or, si l'on fait cette addition, on voit que chaque terme du multiplicande sera répété m fois avec son signe; en réduisant, on aura donc

$$ma-mb+mc-md.$$

Chaque terme du multiplicande sera donc multiplié séparément par le nombre entier.

2° Soit maintenant à diviser le polynôme

$$a-b+c-d$$

par un nombre entier n. Il faut trouver un polynôme qui, multiplié par n, reproduise le polynôme dividende. Le quotient cherché sera

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}+\frac{c}{n}-\frac{d}{n};$$

car si l'on multiplie ce polynôme par n, ce qui se fait en multipliant chaque terme séparément par n, comme nous l'avons vu, on reproduit le polynôme proposé.

3° Il est aisé maintenant de multiplier le polynôme

$$a-b+c-d$$

par un nombre fractionnaire $\frac{m}{n}$. Multiplier par une fraction $\frac{m}{n}$, c'est répéter m fois la n^e partie du multiplicande; en d'autres termes c'est diviser le multiplicande par n et multiplier le résultat par m.

Divisons d'abord le multiplicande par le nombre entier n, nous avons

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}+\frac{c}{d}-\frac{d}{n};$$

pour multiplier ce résultat par le nombre entier m, il suffit de multiplier chaque terme par m, ce qui donne

$$\frac{ma}{n}-\frac{mb}{n}+\frac{mc}{n}-\frac{md}{n},$$

ou

$$\frac{m}{n}a-\frac{m}{n}b+\frac{m}{n}c-\frac{m}{n}d.$$

Mais le multiplicateur $\frac{m}{n}$ est un nombre quelconque que nous pouvons représenter par la lettre e, et nous avons alors

$$(a-b+c-d)\times e = ae-be+ce-de.$$

RÈGLE. Ainsi, *on multiplie un polynôme par un nombre quelconque, en multipliant chaque terme séparément par ce nombre, et donnant à chaque terme du produit le signe du terme correspondant du multiplicande.*

50. *Multiplication d'un polynôme par un polynôme.*

Il est évident que le produit d'une quantité quelconque par la somme de plusieurs nombres est égal à la somme des produits de cette quantité par chacun d'eux. Par exemple, 8 fois une quantité égale 5 fois cette quantité, plus 3 fois cette même quantité. Si donc le polynôme multiplicateur a tous ces termes positifs, il suffira de multiplier le multiplicande par chacun d'eux séparément et d'ajouter les résultats.

Il est évident aussi que le produit d'une quantité quelconque par la différence de deux nombres est égal à la différence des produits de cette quantité par chacun d'eux. Par exemple, 5 fois une quantité égale 8 fois cette quantité, moins 3 fois cette même quantité. Supposons maintenant que le polynôme multiplicateur ait des termes positifs et des termes négatifs, et que la somme des termes positifs l'emporte sur la somme des termes négatifs; la valeur du polynôme multiplicateur est l'excès de la première somme sur la seconde; le produit du multiplicande par cette différence égale donc la différence des produits obtenus en multipliant le multiplicande par chacune de ces deux sommes. Ceci revient à multiplier le multiplicande par chacun des termes du multiplicateur, à ajouter les produits partiels fournis par les termes positifs du multiplicateur et à retrancher les produits partiels fournis par les termes négatifs. Ainsi,

RÈGLE. *Pour multiplier un polynôme par un polynôme, on multiplie tous les termes du multiplicande successivement par chacun des termes du multiplicateur; on écrit avec leurs*

signes les produits partiels fournis par les termes positifs du multiplicateur, et avec des signes contraires les produits fournis par les termes négatifs.

Règle des signes.

51. Soit à multiplier le polynôme

$$a - b + c - d$$

par le polynôme

$$e - f + g - h.$$

Le produit demandé sera

$$+(ae - be + ce - de) - (af - bf + cf - df)$$
$$+(ag - bg + cg - dg) - (ah - bh + ch - dh),$$

ou, en effectuant les additions et les soustractions indiquées par les parenthèses,

$$\begin{array}{l} ae - be + ce - de \\ - af + bf - cf + df \\ + ag - bg + cg - dg \\ - ah + bh - ch + dh. \end{array}$$

On voit que le produit des deux polynômes renferme les produits de chacun des termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur.

On reconnaît aussi qu'*un terme du produit a le signe + s'il provient de deux termes de même signe, le signe — s'il provient de deux termes de signes contraires.* Par exemple, le terme cg, qui provient de deux termes positifs, a le signe +; et de même le terme bf, qui provient de deux termes négatifs; au contraire, les termes bg et cf, qui proviennent de deux termes, l'un positif, l'autre négatif, sont affectés du signe —.

Il est facile de se rendre compte de cette loi, connue sous le nom de règle des signes, si l'on observe que, dans les parenthèses, les signes sont ceux des termes du multi-

plicande et que chacune d'elles est affectée du signe du terme correspondant du multiplicateur. Un terme positif, multiplié par un terme positif, donne un terme positif dans la parenthèse, et comme la parenthèse est précédée elle-même du signe +, ce terme aura finalement le signe +. Un terme négatif, multiplié par un terme négatif, donne un terme négatif dans la parenthèse, et comme la parenthèse est précédée elle-même du signe —, ce terme, changeant de signe, aura finalement le +, etc.

52. Dans la pratique, on ordonne **les deux polynômes** par rapport aux puissances décroissantes ou par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre (n° 36) ; on multiplie tous les termes du multiplicande successivement par chacun des termes du multiplicateur, en allant de gauche à droite, et l'on écrit les produits partiels par lignes horizontales, de manière que les termes semblables se trouvent placés les uns au-dessous des autres, puis on fait la réduction que cette disposition facilite beaucoup.

Exemples.

Exemple I. Multiplier le polynôme

$$4x^5 - 3x^4 - 7x^3 + x^2$$

$$2x^3 - 4x^2 + 5x.$$

On disposera l'opération de la manière suivante :

$$\begin{array}{llllll}
4x^5 - & 3x^4 - & 7x^3 + x^2 & & & \\
2x^3 - & 4x^2 + & 5x & & & \\
\hline
8x^8 - & 6x^7 - & 14x^6 + & 2x^5 & & \\
 & -16x^7 + & 12x^6 + & 28x^5 - & 4x^4 & \\
 & & +20x^6 - & 15x^5 - & 35x^4 + & 5x^3 \\
\hline
8x^8 - & 22x^7 + & 18x^6 + & 15x^5 - & 39x^4 + & 5x^3.
\end{array}$$

Il y a toujours deux termes dans le produit qui ne se réduisent avec aucun autre, et qui par conséquent se conservent intacts au résultat ; c'est le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, et aussi le produit des deux derniers termes. En effet, l'exposant de la lettre ordonnatrice dans un terme quelconque du produit est la somme des exposants de cette lettre dans les deux termes qui l'ont fourni ; or, si les deux polynômes ont été ordonnés par rapport aux puissances décroissantes, il est clair que, dans le terme provenant du produit des deux premiers termes, l'exposant, étant la somme des deux plus forts exposants, sera plus grand que dans tout autre terme du produit ; ce terme sera donc irréductible. De même, le terme provenant du produit des deux derniers termes, ayant un exposant égal à la somme des deux plus petits exposants, et par conséquent moindre que celui de tout autre terme du produit, sera irréductible. Ainsi le premier terme du produit de deux polynômes ordonnés provient exactement du produit des deux premiers termes, et le dernier terme du produit des deux derniers termes. Cette remarque nous sera très-utile pour effectuer la division de deux polynômes.

Il résulte de là que le degré du produit de deux polynômes est égal au degré du multiplicande, plus le degré du multiplicateur.

53. Exemple II.

$$
\begin{array}{llllll}
2a^3 & -3a^2b & -5ab^2 & +b^3 & & \\
4a^2 & -7ab & +3b^2 & & & \\
\hline
8a^5 & -12a^4b & -20a^3b^2 & +4a^2b^3 & & \\
 & -14a^4b & +21a^3b^2 & +35a^2b^3 & -7ab^4 & \\
 & & +6a^3b^2 & -9a^2b^3 & -15ab^4 & +3b^5 \\
\hline
8a^5 & -26a^4b & +7a^3b^2 & +30a^2b^3 & -22ab^4 & +3b^5.
\end{array}
$$

Les deux polynômes ont été ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de a, et les termes qui ne contiennent pas a sont regardés comme étant du degré o par rapport à cette lettre.

54. Exemple III. Quand les polynômes proposés ne sont pas complets, on laisse des intervalles vides afin de pouvoir placer les termes semblables les uns au-dessous des autres.

$$
\begin{array}{l}
x^5-2x^3+7x-1 \\
x^4-3x^3+2 \\
\hline
x^9 \quad -2x^7 \quad +7x^5-x^4 \\
\quad -3x^8 \quad +6x^6 \quad -21x^4+3x^3 \\
\qquad\qquad +2x^5 \quad -4x^3+14x-2 \\
\hline
x^9-3x^8-2x^7+6x^6+9x^5-22x^4-\ x^3+14x-2
\end{array}
$$

55. Exemple IV. Multiplier les deux polynômes

$$
\begin{gathered}
(a^2-ab)x^2+(a^3-2a^2b+b^3)x-(a^2b^2+b^4),\\
(a^2+b^2)x^2-(a^2b+ab^2)x+b^4.
\end{gathered}
$$

Les deux polynômes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, mais les coefficients au lieu d'être des nombres donnés, sont des polynômes en a et b, ce qui complique beaucoup l'opération. On la dispose ordinairement de la manière suivante en plaçant les uns au-dessous des autres les termes qui contiennent la même puissance de x, et pour ne pas répéter cette puissance à chaque fois, on trace un trait vertical à la droite duquel on écrit une fois pour toutes la puissance de x. On multiplie tous les termes du multiplicande d'abord par a^2x^2, ensuite par b^2x^2, puis par $-a^2bx$, etc., en disposant le résultat par colonnes verticales comme nous l'avons dit; puis on réduit les termes semblables dans chaque colonne verticale.

a^2	$x^2 + a^3$	$x - a^2b^2$
$-ab$	$-2a^2b$	$-b^4$
	$+b^3$	
a^2	$x^2 - a^2b$	$x + b^4$
$+b^2$	$-ab^2$	

a^4	$x^4 + a^5$	$x^3 - a^4b^2$	$x^2 + a^4b^3$	$x - a^2b^6$
$-a^3b$	$-2a^4b$	$-a^2b^4$	$+a^2b^5$	$-b^8$
$+a^2b^2$	$+a^2b^3$	$-a^2b^4$	$+a^3b^4$	
$-ab^3$	$+a^3b^2$	$-b^6$	$+ab^6$	
	$-2a^2b^3$	$-a^5b$	$+a^3b^4$	
	$+b^5$	$+2a^4b^2$	$-2a^2b^5$	
	$-a^4b$	$-a^2b^4$	$+b^7$	
	$+a^3b^2$	$-a^4b^2$		
	$-a^3b^2$	$+2a^3b^3$		
	$+a^2b^3$	$-ab^5$		
		$+a^2b^4$		
		$-ab^5$		

a^4	$x^4 + a^5$	$x^3 - a^5b$	$x^2 + a^4b^3$	$x - a^2b^6$
$-a^3b$	$-3a^4b$	$+2a^3b^3$	$+2a^3b^4$	$-b^8$
$+a^2b^2$	$+a^3b^2$	$-2a^2b^4$	$-a^2b^5$	
$-ab^3$	$+b^5$	$-2ab^5$	$+ab^6$	
		$-b^6$	$+b^7$	

Remarques sur la multiplication.

56. Remarque I. Nous avons établi (n° 50), la règle de la multiplication des polynômes, en supposant que, dans le polynôme multiplicateur, la somme des termes positifs est plus grande que celle des termes négatifs, et nous avons vu que l'opération revient à ajouter le produit du multiplicande par la somme des termes positifs du multiplicateur, et à retrancher le produit du multiplicande par la somme des termes négatifs. Il est naturel d'étendre cette idée au cas où la somme des termes positifs du multiplicateur est plus petite que celle des termes négatifs ; nous dirons donc que multiplier par un polynôme quelconque, c'est multiplier par la somme des termes positifs, et par la somme des termes négatifs, ajouter le premier produit et retrancher le second. De cette manière la règle à laquelle nous sommes arrivés sera générale.

Soit, par exemple, l'expression

$$a-(b-c)(d-e)$$

dans laquelle nous supposons b plus grand que c, d plus grand que e. Nous avons à retrancher le produit de deux polynômes; il suffit pour cela de changer les signes de l'un d'eux; car il est évident que l'on change ainsi les signes de tous les termes du produit, et l'on sait que la soustraction revient à un changement de signes. Nous pouvons donc écrire l'expression sous l'une des deux formes

$$a+(c-b)(d-e)$$

ou

$$a+(b-c)(e-d).$$

L'un des polynômes devient négatif, mais ceci n'offre aucun inconvénient, puisqu'en effectuant la multiplication d'après la règle énoncée, les trois expressions donnent naissance au même polynôme

$$a-bd+cd+be-ce.$$

Si l'on change les signes des deux polynômes, le produit ne change pas; ainsi l'expression précédente peut encore être mise sous la forme

$$a-(c-b)(e-d).$$

57. Il convient aussi d'appliquer la même définition à des termes pris isolément, et nous dirons que multiplier une quantité quelconque par une quantité affectée du signe $+$ ou du signe $-$, c'est multiplier par cette quantité et ajouter ou retrancher le produit, suivant que le multiplicateur est positif ou négatif.

Reprenons l'expression

$$a-(b-c)(d-e),$$

dans laquelle nous avons supposé b plus grand que c, d plus grand que e. Si nous désignons par f et g les valeurs des

deux polynômes $b-c$ et $d-e$, l'expression se réduit à

$$a-fg.$$

Nous avons dit que l'on peut mettre cette expression sous la forme

$$a+(b-c)(e-d);$$

remplaçons les deux polynômes $b-c$ et $e-d$ par leurs valeurs $+f$ et $-g$; nous aurons à multiplier $+f$ par $-g$, ce qui donne $-fg$, et nous retrouvons ainsi le même résultat $a-fg$.

Considérons encore l'expression

$$a+(b-c)(d-e),$$

qui se réduit à

$$a+fg.$$

Nous pouvons la mettre sous la forme

$$a+(c-b)(e-d);$$

remplaçons les deux polynômes $c-b$ et $e-d$ par leurs valeurs $-f$ et $-g$, nous aurons à multiplier $-f$ par $-g$, ce qui donne $+fg$, et nous retrouvons ainsi le même résultat $a+fg$.

Il résulte de cette manière d'envisager la *multiplication algébrique* que le produit de deux polynômes est égal à la *somme algébrique* des produits du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur.

58. Remarque II. Le produit d'une quantité négative par une quantité négative étant positif, le carré d'une quantité négative sera positif; mais le cube, qui est égal au produit du carré par la quantité elle-même, sera négatif; en général les puissances paires d'une quantité négative sont positives, mais les puissances impaires sont négatives.

Cette remarque est importante. Si l'on veut changer le signe d'une lettre dans un polynôme, on changera les signes

de toutes les puissances impaires de cette lettre, sans changer ceux des puissances paires.

Par exemple, en multipliant le binôme $a+b$ par lui-même, on trouve

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Changeons le signe de b, le terme $2ab$ changera de signe, mais le terme b^2 ne changera pas ; nous aurons donc

$$(a - b^2) = a^2 - 2ab + b^2.$$

Ces deux égalités donnent naissance à ces deux théorèmes de géométrie élémentaire : le carré construit sur la somme ou sur la différence de deux lignes égale la somme des carrés construits sur chacune de ces deux lignes, plus ou moins deux fois le rectangle ayant l'une pour base, l'autre pour hauteur.

La multiplication de $a+b$ par $a-b$ donne

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

En changeant le signe de b on permute simplement les deux facteurs du produit, et l'on voit qu'en effet le second membre ne change pas. L'égalité précédente s'énonce ainsi : le produit de la somme de deux quantités par leur différence égale la différence des carrés de ces deux quantités. C'est une proposition fréquemment employée en algèbre ; elle se traduit en géométrie par ce théorème : le rectangle construit sur la somme et la différence de deux lignes égale la différence des carrés construits sur ces deux lignes.

Si l'on multiplie le carré de $a+b$ par $a+b$, on trouve

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

on en déduit, en changeant le signe de b,

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

CHAPITRE IV.

DIVISION.

---

59. La division est l'opération inverse de la multiplication. Elle a pour but, étant données deux expressions algébriques, nommées, l'une dividende, l'autre diviseur, d'en trouver une troisième nommée quotient, qui, multipliée par le diviseur, reproduise le dividende.

60. *Quotient de deux puissances d'un même nombre.* Soit à diviser a^m par a^n, le quotient sera a^{m-n}; car si l'on multiplie ce quotient par le diviseur a^n, ce qui se fait en ajoutant les exposants, on reproduit le dividende a^m. On a donc

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Règle. *Pour diviser deux puissances d'un même nombre l'une par l'autre, de l'exposant du dividende on retranche celui du diviseur.*

Exemple :

$$\frac{a^7}{a^4} = a^3.$$

61. *Exposant zéro.* Le quotient est entier lorsque l'exposant du dividende est plus grand que celui du diviseur. Alors on peut effectivement retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende.

Lorsque l'exposant du diviseur est égal à celui du dividende, l'application de la règle précédente conduit au sym-

bole a^0; car on a, dans ce cas,

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0.$$

Le symbole a^0, représentant le quotient de deux quantités égales, a une valeur égale à l'unité, quelle que soit la valeur de a. L'emploi de ce symbole est très-utile en algèbre; nous en avons déjà fait usage plusieurs fois implicitement; ainsi nous avons dit (n° 32) que lorsqu'une lettre n'entre pas dans un monôme, on peut la considérer comme y entrant avec l'exposant zéro, et nous avons supposé le polynôme

$$2a^3 - 5a^2b + 4ab^2 - 6b^3$$

écrit sous la forme

$$2a^3b^0 - 5a^2b + 4ab^2 - 6a^0b^3.$$

Les facteurs introduits b^0 et a^0, étant égaux à l'unité, ne changent pas la valeur du premier ni du dernier terme.

L'emploi de l'exposant zéro simplifie les énoncés : on peut énoncer la règle de la multiplication des monômes en disant simplement que l'on multiplie les coefficients et que l'on ajoute les exposants des mêmes lettres. Il n'y a qu'à supposer, en effet, que les lettres qui diffèrent entrent dans l'autre monôme avec l'exposant zéro.

Lorsque l'exposant du diviseur est plus grand que celui du dividende, le quotient est fractionnaire; on le simplifie en divisant les deux termes par le numérateur. Ainsi

$$\frac{a^4}{a^7} = \frac{1}{a^3}.$$

Dans ce cas, l'application de la règle conduit au symbole a^{-3}, qui représente $\frac{1}{a^3}$; c'est là l'origine des exposants négatifs dont il sera question plus tard.

Division des monômes.

62. La règle formulée pour la multiplication des monômes (n° 48) conduit immédiatement à la règle suivante :

Règle. *Pour diviser un monôme par un monôme, on divise le coefficient du dividende par celui du diviseur, et l'on retranche les exposants du diviseur des exposants des mêmes lettres dans le dividende.*

Soit à diviser $12a^5b^3c^7de^4$ par $4a^3b^2c^4d$. Le quotient demandé sera $3a^2bc^3e^4$; car si l'on multiplie ce quotient par le diviseur, on reproduira évidemment le dividende. Ainsi

$$\frac{12a^5b^3c^7de^4}{4a^3b^2c^4d} = 3a^2bc^3e^4.$$

En appliquant la règle, on regardera la lettre e comme affectée de l'exposant o dans le diviseur.

63. Remarque. Pour que le quotient soit entier, il faut que le coefficient du dividende soit divisible par le coefficient du diviseur, et que les exposants du diviseur ne surpassent pas les exposants des mêmes lettres dans le dividende.

La seconde condition est surtout essentielle ; car si elle est remplie sans que la première le soit, le quotient aura, il est vrai, un coefficient fractionnaire, mais il sera encore *entier algébriquement*. On aura, par exemple,

$$\frac{8a^7b^5c^4d^2e}{12a^4b^3c^2d} = \frac{2}{3}a^3b^2c^2de.$$

On dit qu'une expression est *entière algébriquement*, lorsqu'elle est entière sauf des cofficients fractionnaires.

Si la seconde condition n'est pas remplie, le quotient sera fractionnaire ; mais alors on le simplifiera autant que possible. Par exemple

$$\frac{18a^9b^4c^2d^5}{30a^7b^5c^4} = \frac{3a^2d^5}{5bc^2}.$$

64. *Division d'un polynôme par un monôme.* On sait que l'on multiplie un polynôme par un monôme, en multipliant chaque terme du polynôme par le monôme (n° 49) ; on effectuera donc la division d'un polynôme entier par un monôme entier, en divisant chaque terme du dividende par le diviseur. Le quotient sera entier si chaque terme du dividende est divisible séparément par le diviseur ; sinon, il sera fractionnaire.

Division des polynômes.

65. Supposons les deux polynômes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre. La question est de trouver un polynôme entier qui, multiplié par le polynôme diviseur, reproduise le dividende. Imaginons ce polynôme trouvé et ordonné aussi par rapport aux puissances décroissantes de la même lettre. Nous savons que, dans la multiplication de deux polynômes ordonnés (n° 52), le premier terme du produit provient sans réduction de la multiplication du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur. Ainsi, le premier terme du dividende est exactement le produit du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient ; si donc on divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, on obtiendra le premier terme du quotient.

Le dividende est égal à la somme des produits partiels obtenus en multipliant le diviseur par chacun des termes du quotient ; multiplions le diviseur par le premier terme du quotient, et retranchons ce produit du dividende, nous aurons un reste qui sera égal au produit du diviseur par les autres termes du quotient. Ce reste constitue donc un nouveau dividende, sur lequel nous pouvons raisonner comme sur le dividende proposé. Le premier terme de ce nouveau

dividende est le produit du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient correspondant; en divisant le premier terme du reste par le premier terme du diviseur, on aura donc le second terme du quotient, etc.

Rien n'est changé dans le raisonnement quand on suppose les polynômes ordonnés par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre.

On déduit de là la règle suivante :

RÈGLE. *Pour diviser deux polynômes entiers l'un par l'autre, on ordonne ces deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes ou par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre; on divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, ce qui donne le premier terme du quotient; on multiplie le diviseur par ce premier terme du quotient et on retranche le produit du dividende; on divise le premier terme du reste par le premier terme du diviseur, ce qui donne le deuxième terme du quotient; on multiplie le diviseur par ce deuxième terme du quotient, et on retranche le produit du premier reste: on divise le premier terme de ce deuxième reste par le premier terme du diviseur, et l'on continue de cette manière jusqu'à ce que l'on arrive au dernier terme du quotient.*

On obtient directement le dernier terme du quotient en divisant le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur. Car, dans la multiplication de deux polynômes ordonnés, le dernier terme du produit provient aussi sans réduction de la multiplication du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur. Arrivé au dernier terme, on doit trouver ensuite un reste nul, si la division se fait exactement.

Il est clair que la loi des signes est la même que dans la multiplication; si les deux termes que l'on divise l'un par l'autre ont le même signe, le terme du quotient devra être

affecté du signe $+$; s'ils ont des signes contraires, le terme du quotient devra être affecté du signe $-$.

66. Soit à diviser le polynôme

$$8a^5 - 26a^4b + 7a^3b^2 + 30a^2b^3 - 22ab^4 + 3b^5$$

par le polynôme

$$2a^3 - 3a^2b - 5ab^2 + b^3.$$

On dispose l'opération de la manière suivante :

$$\begin{array}{l|l}
8a^5 - 26a^4b + 7a^3b^2 + 30a^2b^3 - 22ab^4 + 3b^5 & 2a^3 - 3a^2b - 5ab^2 + b^3 \\
-8a^5 + 12a^4b + 20a^3b^2 - 4a^2b^3 & \overline{4a^2 - 7ab + 3b^2} \\
\hline
\quad -14a^4b + 27a^3b^2 + 26a^2b^3 - 22ab^4 + 3b^5 & \\
\quad +14a^4b - 21a^3b^2 - 35a^2b^3 + 7ab^4 & \\
\hline
\qquad + 6a^3b^2 - 9a^2b^3 - 15ab^4 + 3b^5 & \\
\qquad - 6a^3b^2 + 9a^2b^3 + 15ab^4 - 3b^5 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Les deux polynômes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de a. On divise le premier terme $8a^5$ du dividende par le premier terme $2a^3$ du diviseur, ce qui donne le premier terme $4a^2$ du quotient. On multiplie tout le diviseur par $4a^2$ et on retranche le produit du dividende ; pour cela on écrit au-dessous du dividende les différents termes de ce produit, avec des signes contraires, puis on additionne, en réduisant les termes semblables. On obtient ainsi le reste

$$-14a^4b + 27a^3b^2 + 26a^2b^3 - 22ab^4 + 3b^5.$$

On divise le premier terme $-14a^4b$ de ce reste par le premier terme $2a^3$ du diviseur, ce qui donne le deuxième terme $-7ab$ du quotient. On observe que ce terme doit être affecté du signe $-$, en vertu de la règle des signes établie pour la multiplication des polynômes (n° 51) ; en effet, le terme $-14a^4b$ du produit ayant le signe $-$, les deux termes qui le produisent doivent avoir des signes contraires ;

mais le terme $2a^3$ a le signe $+$; donc le terme $7ab$ aura le signe $-$. On multiplie le diviseur par ce deuxième terme et on retranche le produit du reste ; on obtient ainsi un deuxième reste

$$+6a^3b^2 - 9a^2b^3 - 15ab^4 + 3b^5.$$

On divise le premier terme $+6a^3b^2$ de ce deuxième reste par le premier terme $2a^3$ du diviseur, ce qui donne le troisième terme $+3b^2$ du quotient. On multiplie le diviseur par ce troisième terme du quotient, et on retranche le produit du deuxième reste ; on trouve *zéro*. L'opération est terminée. Le quotient demandé est

$$4a^2 - 7ab + 3b^2.$$

Remarquons que l'on aurait trouvé immédiatement le dernier terme $+3b^2$ du quotient, en divisant le dernier terme $+3b^5$ du dividende par le dernier terme $+b^3$ du diviseur.

Le degré du quotient par rapport à la lettre ordonnatrice est égal au degré du dividende, moins celui du diviseur.

67. Soit encore à diviser

$$4x^4 - 9x^2 + 6x - 1$$

par

$$2x^2 - 3x + 1.$$

Le polynôme dividende n'étant pas complet, on laissera des intervalles vides afin de pouvoir placer les termes semblables les uns au-dessous des autres.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & & -9x^2 & +6x & -1 & 2x^2-3x+1 \\
-4x^4 & +6x^3 & -2x^2 & & & \overline{2x^2+3x-1} \\
\hline
 & +6x^3 & -11x^2 & +6x & -1 & \\
 & -6x^3 & +9x^2 & -3x & & \\
\cline{2-5}
 & & -2x^2 & +3x & -1 & \\
 & & +2x^2 & -3x & +1 & \\
\cline{3-5}
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Remarques sur la division.

68. Remarque I. Quand les polynômes proposés ren ment plusieurs termes non semblables du même degré rapport à la lettre ordonnatrice, les coefficients des dive puissances de cette lettre sont des polynômes et l'opéra devient très-compliquée. Soit à diviser le polynôme

$$(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3)x^4+(a^5-3a^4b+a^3b^2+b^5)x^3$$
$$+(-a^5b+2a^3b^3-2a^2b^4-2ab^5-b^6)x^2$$
$$+(a^4b^3+2a^3b^4-a^2b^5+ab^6+b^7)x-(a^2b^6+b^8)$$

par

$$(a^2+b^2)x^2-(a^2b+ab^2)x+b^4.$$

On disposera l'opération de la manière suivante :

a^4	x^4+a^5	x^3-a^5b	$x^2+a^4b^3$	$x-a^2b^6$		
$-a^3b$	$-3a^4b$	$+2a^3b^3$	$+3a^3b^4$	$-b^8$	a^2	x^2-a^2b
$+a^2b^2$	$+a^3b^2$	$-2a^2b^4$	$-a^2b^5$		$+b^2$	$-ab^2$
$-ab^3$	$+b^5$	$-2ab^5$	$+ab^6$		a^2	x^2+a^3
		$-b^6$	$+b^7$		$-ab$	$-2a^2b$
	$+a^4b$	$-a^2b^4$	$-a^3b^4$	$+a^2b^6$		$+b^3$
	$+a^3b^2$	$+ab^5$	$+2a^2b^5$	$+b^8$		
	$-a^3b^2$	$+a^5b$	$-b^7$	0		
	$-a^2b^3$	$+a^4b^2$	$-a^4b^3$			
	a^5	$-2a^4b^2$	$-a^3b^4$			
	$-2a^4b$	$-2a^3b^3$	$-a^2b^5$			
	$+a^3b^2$	$+a^2b^4$	$-ab^6$			
	$-a^2b^3$	$+ab^5$	0			
	$+b^5$	$-a^4b^2$				
		$-2a^2b^4$				
		$-b^6$				

1re Division partielle.

$$\begin{array}{l|l} a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3 & a^2+b^2 \\ -a^4 \qquad -a^2b^2 & a^2-ab \\ \hline -a^3b \qquad -ab^3 & \\ +a^3b \qquad +ab^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2° Division partielle.

$$\begin{array}{l|l}
a^5 - 2a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + b^5 & a^2 + b^2 \\ \cline{2-2}
-a^5 \qquad\quad - a^3b^2 & a^3 - 2a^2b + b^3 \\ \hline
\quad -2a^4b \qquad - a^2b^3 + b^5 & \\
\quad +2a^4b \qquad + 2a^2b^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad + a^2b^3 + b^5 & \\
\qquad\qquad\quad - a^2b^3 - b^5 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

3° Division partielle.

$$\begin{array}{l|l}
-a^4b^2 - 2a^2b^4 - b^6 & a^2 + b^2 \\ \cline{2-2}
+a^4b^2 + a^2b^4 & -a^2b^2 - b^4 \\ \hline
\qquad - a^2b^4 - b^6 & \\
\qquad + a^2b^4 + b^6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Les deux polynômes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x et les coefficients sont eux-mêmes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de a. Pour avoir le premier terme du quotient, il faut diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; on divisera donc le coefficient

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3$$

du premier terme du dividende par le coefficient $a^2 + b^2$ du premier terme du diviseur, faisant cette division à part, on trouve ainsi

$$(a^2 - ab)x^2$$

pour le premier terme du quotient. On multiplie le diviseur par le premier terme du quotient et on écrit le résultat avec des signes contraires au-dessous du dividende et dans les colonnes verticales convenables. Il est inutile d'écrire le produit du premier terme du diviseur, car on sait d'avance

que ce produit détruira le premier terme du dividende. Comme il suffit de connaître le premier terme du reste pour continuer l'opération, on ne fera la réduction des termes semblables que dans la deuxième colonne verticale.

Pour avoir le deuxième terme du quotient, on divise le premier terme du reste par le premier terme du diviseur, ce qui exige que l'on effectue à part la division du coefficient

$$a^5 - 2a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + b^5$$

de ce premier terme par le coefficient $a^2 + b^2$ du premier terme du diviseur; on trouve ainsi

$$+(a^3 - 2a^2b + b^3)x$$

pour le deuxième terme du quotient. On multiplie le diviseur par le deuxième terme du quotient, et on écrit le résultat avec des signes contraires au-dessous du dividende et dans les colonnes convenables; il est inutile d'écrire le produit du premier terme du diviseur, puisqu'on sait que ce produit détruit le premier terme du reste. On réduira les termes semblables dans la troisième colonne verticale, afin d'avoir le premier terme du nouveau reste.

Divisant à part le coefficient

$$-a^4b^2 - 2a^2b^4 - b^6$$

du premier terme du deuxième reste par le coefficient $a^2 + b^2$ du premier terme du diviseur, on obtient le troisième terme du quotient

$$-a^2b^2 - b^4.$$

On multiplie le diviseur par le troisième terme du quotient et on écrit le résultat avec des signes contraires au-dessous du dividende; il est inutile comme précédemment d'écrire le produit du premier terme du diviseur. Réduisant les termes semblables dans la quatrième et la cinquième colonne verticale, on trouve un reste nul. L'opération est terminée.

69. Remarque II. Les raisonnements précédents et les conclusions que nous en avons tirées supposent qu'il existe un polynôme entier qui, multiplié par le diviseur, reproduit le dividende. Voyons à quels caractères on reconnaît la possibilité de la division.

Les polynômes étant ordonnés par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre, il est nécessaire d'abord que le premier terme du dividende soit divisible par le premier terme du diviseur et le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur. Soit, par exemple, à diviser

$$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 8x$$

par

$$x^3 - 4x^2.$$

Le dernier terme $8x$ du dividende n'est pas divisible par le dernier terme $4x^2$ du diviseur; donc la division est impossible.

Si ces deux conditions sont remplies, on effectuera la division par le procédé ordinaire; si l'opération ne conduit pas au dernier terme tel qu'on l'a obtenu directement, la division est impossible. Soit, par exemple, à diviser

$$2 - 2x - 5x^2 + 4x^3 - 6x^4$$

par

$$1 - 4x + 3x^2.$$

Le premier terme du dividende est divisible par le premier terme du diviseur, ce qui donne 2 pour le premier terme du quotient; le dernier terme est aussi divisible par le dernier terme, ce qui donne $-2x^2$ pour le dernier terme du quotient. Effectuons l'opération suivant le procédé ordinaire.

$$\begin{array}{l|l}
2 - 3x - 5x^2 + 4x^3 - 6x^4 & 1 - 4x + 3x^2 \\ \cline{2-2}
-2 + 8x - 6x^2 & 2 + 5x + 9x^2 \\ \cline{1-1}
+5x - 11x^2 + 4x^3 - 6x^4 & \\
-5x + 20x^2 - 15x^3 & \\ \cline{1-1}
+9x^2 - 11x^3 - 6x^4 &
\end{array}$$

L'opération nous conduit à un dernier terme $+9x^2$, qui n'est pas égal au dernier terme $-2x^2$, tel qu'on l'a trouvé directement. Donc la division est impossible.

Soit encore à diviser

$$x^4-5x^3-2x^2+3x+4$$

par

$$x^2-2x+3.$$

La division des deux derniers termes donne $\frac{4}{3}$ pour le dernier terme du quotient. Mais le coefficient du premier terme du diviseur étant l'unité, on n'aura dans le calcul que des coefficients entiers, et par conséquent on n'arrivera pas à un dernier terme fractionnaire. Donc la division est impossible.

Si l'opération conduit au dernier terme tel qu'on l'a obtenu à priori, il faut encore que le reste suivant soit nul. Soit, par exemple, à diviser

$$2-3x-16x^2+4x^3-6x^4$$

par

$$1-4x+3x^2.$$

L'opération conduit au dernier terme $-2x^2$ tel qu'on l'obtient directement, mais le reste suivant n'est pas nul. Donc la division est impossible.

70. Remarque III. En général, on ordonne les deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes de la lettre x, par exemple. Soit m le degré du dividende, n celui du diviseur, m étant supposé plus grand que n; en effectuant l'opération, on obtient au quotient un polynôme entier du degré $m-n$. On observe que les degrés des restes successifs iront en diminuant d'unité en unité; on poussera l'opération jusqu'à ce que l'on arrive à un reste d'un degré inférieur à celui du diviseur. Si ce reste est nul, la division se fait exactement et le quotient est entier. S'il n'est pas

nul, il est impossible de continuer l'opération; le quotient est fractionnaire, et pour le compléter on ajoute une fraction ayant pour numérateur le dernier reste, et pour dénominateur le diviseur. En voici un exemple :

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 7x^3 + 10x^2 + \ \ 7x - 5 & x^2 - 5x + 3 \\
-x^4 + 5x^3 - \ \ 3x^2 \qquad\qquad & \overline{x^2 - 2x - 3} \\
\hline
-2x^3 + \ \ 7x^2 + \ \ 7x - 5 & \\
+2x^3 - 10x^2 + \ \ 6x \quad\ \ & \\
\hline
-\ \ 3x^2 + 13x - 5 & \\
+\ \ 3x^2 - 15x + 9 & \\
\hline
-\ \ 2x + 4 &
\end{array}
$$

On a

$$\frac{x^4 - 7x^3 + 10x^2 + 7x - 5}{x^2 - 5x + 3} = x^2 - 2x - 3 - \frac{2x - 4}{x^2 - 5x + 3}.$$

71. En résumant ce qui précède, on voit qu'une opération algébrique a pour but de composer un polynôme au moyen de deux ou de plusieurs polynômes donnés, d'après certaines règles déterminées.

A un point de vue plus général, on peut considérer une opération algébrique comme ayant pour but de transformer une expression en une autre équivalente. On dit que deux expressions algébriques sont *équivalentes* lorsqu'elles fournissent le même résultat, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres. Ainsi les deux expressions

$$(a + b)^2,$$
$$a^2 + 2ab + b^2,$$

qui indiquent deux séries d'opérations différentes à effectuer sur les quantités a et b, conduiront toujours au même résultat, quelles que soient les valeurs particulières attribuées aux lettres a et b; ces deux expressions sont donc

équivalentes, et l'on peut remplacer l'une par l'autre à volonté. Il est clair que les opérations algébriques transforment les expressions en d'autres équivalentes ; car, dans les raisonnements, les lettres représentent des quantités quelconques, et non telles ou telles valeurs particulières.

CHAPITRE V.

FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

72. On appelle *fraction algébrique* le quotient de deux quantités quelconques, entières ou fractionnaires, positives ou négatives. Les fractions algébriques jouissent des mêmes propriétés que les fractions arithmétiques.

Théorème I.

On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant ses deux termes par une même quantité.

Soit la fraction algébrique $\frac{a}{b}$, dont nous désignerons par q la valeur. On a

$$\frac{a}{b}=q,$$

ou

$$a=bq.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette égalité par la même quantité c, il vient

$$ac=bqc=bcq,$$

d'où

$$\frac{ac}{bc}=q.$$

Donc

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}.$$

Réciproquement, si l'on divise les deux termes de la

fraction $\frac{a}{b}$ par une même quantité c, on obtient une fraction égale

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}};$$

car, en multipliant par c les deux membres de cette dernière fraction, on reproduit la fraction proposée.

COROLLAIRE I. *On ne change pas la valeur d'une fraction en changeant les signes de ses deux termes;* car ceci revient à multiplier ses deux termes par -1.

COROLLAIRE II. *Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, on multiplie les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres.*

COROLLAIRE III. *Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, on divise ses deux termes par tous leurs facteurs communs.*

COROLLAIRE IV. *On effectue l'addition ou la soustraction de plusieurs fractions en réduisant ces fractions au même dénominateur, et ajoutant ou retranchant les numérateurs.*

THÉORÈME II.

On multiplie deux fractions, en multipliant numérateur par numérateur, dénominateur par dénominateur.

Soient les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ dont nous désignerons les valeurs par q et q'; on a

$$\frac{a}{c} = q, \qquad \frac{c}{d} = q',$$

ou

$$a = bq, \qquad c = dq'.$$

Si l'on multiplie ces deux égalités membre à membre, il vient

$$ac = bdqq';$$

d'où

$$\frac{ac}{bd} = qq'.$$

Ainsi

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}.$$

THÉORÈME III.

On divise par une fraction, en multipliant par la fraction diviseur renversée.

Soit à diviser la fraction $\frac{a}{b}$ par la fraction $\frac{c}{d}$. Je dis que le quotient cherché égale

$$\frac{ad}{bc};$$

car, si l'on multiplie ce quotient par le diviseur, et si l'on simplifie, on reproduit le dividende.

THÉORÈME IV.

73. *Lorsqu'on a plusieurs fractions égales et qu'on ajoute les numérateurs et les dénominateurs, on forme une nouvelle fraction égale à chacune des fractions proposées.*

Soient les fractions égales

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots\ldots$$

Si l'on désigne par q la valeur de chacune d'elles, on a

$$\frac{a}{b} = q, \qquad \frac{a'}{b'} = q, \qquad \frac{a''}{b''} = q, \ldots\ldots$$

ou

$$a = bq, \quad a' = b'q, \quad a'' = b''q, \ldots\ldots$$

Si l'on ajoute ces diverses égalités membre à membre, il vient

$$a + a' + a'' + \ldots\ldots = (b + b' + b'' + \ldots\ldots)q,$$

d'où

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots\ldots}{b + b' + b'' + \ldots\ldots} = q.$$

Corollaire I. *Lorsqu'on a plusieurs fractions égales, si, après avoir multiplié les deux termes de chacune d'elles par une même quantité, on ajoute les numérateurs et les dénominateurs, on forme une nouvelle fraction égale à chacune des fractions proposées.*

Soient les fractions égales

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots\ldots$$

Si l'on multiplie les deux termes de la première par m, ceux de la seconde par m',......, on obtient des fractions

$$\frac{ma}{mb}=\frac{m'a'}{m'b'}=\frac{m''a''}{m''b''}\ldots\ldots$$

égales respectivement aux fractions proposées, et par conséquent égales entre elles. Donc la nouvelle fraction

$$\frac{ma+m'a'+m''a''+\ldots\ldots}{mb+m'b'+m''b''+\ldots\ldots}$$

est aussi égale à chacune des fractions proposées.

Corollaire II. *Lorsqu'on a plusieurs fractions égales, la fraction formée en prenant la racine carrée de la somme des carrés des numérateurs, la racine carrée de la somme des carrés des dénominateurs, est égale à chacune des fractions proposées.*

En effet, les carrés des fractions égales

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots\ldots$$

sont des fractions égales

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a'^2}{b'^2}=\frac{a''^2}{b''^2}=\ldots\ldots$$

En vertu du théorème précédent, on a

$$\frac{a^2+a'^2+a''^2+\ldots\ldots}{b^2+b'^2+b''^2+\ldots\ldots}=\frac{a^2}{b^2};$$

si l'on prend la racine carrée, il vient

$$\frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots\ldots}}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots\ldots}} = \frac{a}{b}.$$

Applications. 1° Trouver les côtés d'un rectangle semblable à un rectangle donné, connaissant le périmètre.

Appelons a et b les deux côtés du rectangle donné, $2p$ le périmètre donné, x et y les deux côtés du rectangle cherché. On a les rapports égaux

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

En ajoutant les numérateurs et les dénominateurs, on forme la fraction égale

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{p}{a+b};$$

on a donc

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{p}{a+b};$$

d'où l'on déduit, en égalant chacune des deux premières fractions à la troisième,

$$x = \frac{pa}{a+b}, \qquad y = \frac{pb}{a+b}.$$

2° Trouver les côtés d'un rectangle semblable à un rectangle donné, connaissant la diagonale d.

Si l'on applique le corollaire II aux deux fractions égales

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b},$$

on forme la fraction égale

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On a donc

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{da}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad y=\frac{db}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3° Trouver les côtés d'un rectangle semblable à ı tangle donné, connaissant l'excès e du demi-périmè la diagonale.

Les deux fractions égales

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$$

donnent naissance aux deux fractions égales

$$\frac{x+y}{a+b}\quad\text{et}\quad\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

qui, à leur tour, produisent la fraction égale

$$\frac{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{e}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On a donc

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{e}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}},$$

d'où l'on déduit les valeurs de x et de y.

EXERCICES.

Questions résolues.

74. Question I. *Diviser* x^m-a^m *par* $x-a$.

$$\begin{array}{lr|l}
 & x^m \quad -a^m & x-a \\
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste.}\ldots & a\,x^{m-1}-a^m & x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots+a^{m-1} \\
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste.}\ldots & a^2x^{m-2}-a^m & \\
 & \ldots\ldots & \\
 & \ldots\ldots & \\
 & a^{m-1}x-a^m & \\
\end{array}$$

Dernier reste. $a^m-a^m=0$.

La loi des termes du quotient est facile à observer. Tous les termes sont positifs; les exposants de x vont en diminuant, tandis que ceux de a vont en augmentant. Le dernier reste étant nul, la division se fait exactement, quel que soit l'exposant m. On a donc

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

Ce résultat est d'un usage fréquent en algèbre; il est bon de se le rappeler.

On pouvait d'ailleurs reconnaître à priori la possibilité de la division. En effet, on sait qu'en effectuant l'opération on trouvera un quotient entier du degré $m-1$ par rapport à x et un reste du degré 0 par rapport à x, c'est-à-dire indépendant de x. Si donc on désigne par q le quotient, par r le reste, on aura

$$x^m - a^m = (x-a)q + r.$$

Cette égalité a lieu quelle que soit la valeur de x; or, donnons à x la valeur de a, le premier membre devient nul, le premier terme du second membre devient aussi nul; car le facteur $x-a$ devenant nul, et le polynôme entier q prenant nécessairement une valeur finie, le produit devient nul; donc le reste r est nul; et il est identiquement nul, c'est-à-dire qu'il est nul, quelle que soit x, puisqu'il ne contient pas cette lettre. Donc la division est possible.

75. QUESTION II. *Diviser* $x^m + a^m$ *par* $x - a$.

	$x^m \; + a^m$	$x - a$
1er reste. . .	$a\,x^{m-1} + a^m$	$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}$
2e reste. . .	$a^2x^{m-2} + a^m$	
	. . . . . .	
	. . . . . .	
	$a^{m-1}x + a^m$	
Dernier reste.	$a^m + a^m = 2a^m$.	

Le quotient est le même que dans l'exemple précédent; seulement le dernier reste, au lieu d'être nul, est égal à $2a^m$. La division est impossible. Le quotient est fractionnaire et l'on a

$$\frac{x^m + a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots + a^{m-1} + \frac{2a^m}{x - a}.$$

On peut aussi reconnaître à priori l'impossibilité de la division. Car, en appelant toujours q le quotient, r le reste, on a

$$x^m + a^m = (x - a)q + r;$$

d'où l'on déduit, en faisant $x = a$,

$$2a^m = r.$$

76. QUESTION III. *Diviser* $x^m - a^m$ *par* $x + a$.

Il faut ici distinguer deux cas, suivant que m est pair ou impair.

1° m pair.

$$\begin{array}{lr|l}
 & x^m \quad - a^m & x + a \\
1^{er} \text{ reste.} & -a\,x^{m-1} - a^m & x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots + a^{m-2}x - a^{m-1} \\
2^e \text{ reste.} & +a^2x^{m-2} - a^m & \\
 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\
 & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\
 & -a^{m-1}x - a^m & \\
D^{er} \text{ reste.} & +a^m - a^m = 0. &
\end{array}$$

Les termes du quotient sont affectés alternativement du signe + et du signe —. Le quotient, étant un polynôme complet du degré $m - 1$, contient m termes, c'est-à-dire un nombre pair de termes, si m est pair; comme les signes alternent en commençant par le signe +, le dernier terme sera affecté du signe —, et par conséquent le dernier reste sera $+a^m - a^m$ ou zéro. Ainsi, dans ce cas, la division est possible.

2° Si m est impair, le quotient, ayant un nombre impair

de termes, se termine par le signe +, et le reste est $-a^m - a^m$ ou $-2a^m$. Ainsi, dans ce cas, la division est impossible.

QUESTION IV. *Diviser* $x^m + a^m$ *par* $x + a$.

Le quotient a la même forme que dans l'exemple précédent. Si m est impair, le dernier terme du quotient a le signe + et l'on a pour reste $-a^m + a^m$, c'est-à-dire zéro; la division est possible. Mais si m est pair, le dernier terme du quotient a le signe — et l'on a pour reste $+ a^m + a^m$, c'est-à-dire $2a^m$; la division est impossible.

On peut rattacher ces deux derniers exemples aux deux précédents par des considérations sur les changements de signes. Nous savons que, lorsqu'on change le signe d'une lettre, les puissances impaires de cette lettre changent de signes, tandis que les puissances paires ne changent pas. La division effectuée au n° 74 prouve que l'on a

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-1});$$

changeons le signe de a; si m est pair, nous aurons

$$x^m - a^m = (x + a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots - a^{m-1});$$

et, si m est impair,

$$x^m + a^m = (x + a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-1}).$$

On en conclut que $x^m - a^m$ est divisible par $x + a$, quand m est pair, et que $x^m + a^m$ est divisible par $x + a$ quand m est impair.

Questions à résoudre.

QUESTION I. Faire la multiplication

$$(a^2 + ab + b^2)(a - b).$$

Réponse : Le produit est $a^3 - b^3$.

QUESTION II. Faire la multiplication

$$(a^2 - ab + b^2)(a + b).$$

Réponse : $a^3 + b^3.$

QUESTION III. Faire la multiplication

$$(a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 \ldots + b^m)(a - b).$$

Réponse : $a^{m+1} - b^{m+1}.$

QUESTION IV. Faire la multiplication

$$(3a^2x - 5b^3)(3a^2x + 5b^3).$$

Réponse : $9a^4x^2 - 25b^6.$

QUESTION V. Faire la multiplication

$$(5ab + 3ac - c^2)(-5ab + 3ac - c^2)$$

Réponse : $-25a^2b^2 + 9a^2c^2 - 6ac^3 + c^4.$

QUESTION VI. Faire la division

$$\frac{2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4}{2a^2 - 3ab + 4b^2}.$$

Réponse : $a^2 - 5ab + 6b^2.$

QUESTION VII. Faire la division

$$\frac{4x^4 - 9a^2x^2 + 6a^3x - a^4}{2x^2 - 3ax + a^2}.$$

Réponse : $2x^2 + 3ax - a^2.$

QUESTION VIII. Calculer

$$\frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2}.$$

Réponse : $a^4 + a^2b^2 + b^4.$

QUESTION IX. Calculer

$$\frac{125a^3 - 8b^3}{5a - 2b}.$$

Réponse : $$25a^2 + 10ab + 4b^2.$$

QUESTION X. Multiplier le polynôme

$$(a-b)x^2 + a(a-b)x - ab^2$$

par

$$(a+b)x - a^2 ;$$

Réponse :

$$(a^2-b^2)x^3 + ab(a-b)x^2 - (a^4 - a^3b + a^2b^2 + ab^3)\,x + a^3b^2.$$

QUESTION XI. Simplifier l'expression

$$\frac{6ab}{3c-d}\left(\frac{c+d}{4} - \frac{d}{3}\right).$$

Réponse : $$\frac{ab}{2}.$$

QUESTION XII. Simplifier l'expression

$$\frac{a - \dfrac{a-b}{1+ab}}{1 + \dfrac{a(a-b)}{1+ab}}.$$

Réponse : $$b.$$

QUESTION XIII. Vérifier l'égalité

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) - (aa'+bb')^2 = (ab'-ba')^2.$$

QUESTION XIV. Vérifier l'égalité

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2) - (aa'+bb'+cc')^2$$
$$= (ab'-ba')^2 + (bc'-cb')^2 + (ca'-ac')^2.$$

QUESTION XV. Reconnaître dans quel cas $a^m - b^n$ est divisible par $a^p - b^q$.

Réponse. Il faut que les deux exposants m et n du dividende soient des équimultiples des deux exposants p et q du diviseur.

LIVRE II.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

Définitions.

77. Une *identité* est une égalité évidente par elle-même, comme

$$a = a.$$

Une *équation* est une égalité dans laquelle entrent une ou plusieurs lettres désignant des quantités inconnues.

Résoudre des équations, c'est trouver les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations proposées, c'est-à-dire qui rendent égaux les deux membres de chacune d'elles. Si l'on remplace les inconnues par leurs valeurs, les équations deviennent des identités.

On dit que deux équations sont *équivalentes*, lorsque toutes les valeurs des inconnues qui satisfont à l'une satisfont à l'autre et réciproquement.

Deux systèmes d'équations simultanées sont *équivalents*, lorsque toutes les valeurs des inconnues qui satisfont à l'un satisfont à l'autre et réciproquement.

Il est clair que, dans la résolution des équations, on peut

remplacer une équation par une équation équivalente, un système d'équations par un système équivalent.

78. On appelle *degré* d'une équation la plus grande somme des exposants de toutes les inconnues dans un même terme. Ainsi les équations

$$5x - 7 = 24 + 2x,$$
$$7x + 6y = 40,$$

sont du premier degré. Les équations

$$4x^2 - 7y = 15,$$
$$5x - 3y = 2xy - 3,$$

sont du second degré; dans cette dernière le terme $2xy$ est du second degré par rapport aux deux inconnues x et y.

On a classé les équations d'après leur degré. Nous nous occuperons d'abord des équations du premier degré.

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE.

79. La résolution d'une équation du premier degré à une inconnue dépend de principes très-simples dont nous avons déjà parlé dans l'introduction (nos 7 et 8) et que nous allons exposer avec plus de détail.

THÉORÈME I.

Si aux deux membres d'une équation on ajoute une même quantité, ou si des deux membres on retranche une même quantité, on transforme cette équation en une autre équivalente.

Appelons A et B les deux membres de l'équation proposée, qui sera ainsi représentée par

$$A = B,$$

et, afin de simplifier, supposons qu'elle ne contienne qu'une seule inconnue x. Une solution de cette équation est une valeur de x qui rend les deux expressions algébriques A et B égales entre elles. En ajoutant aux deux membres la même quantité C, nous formerons une nouvelle équation

$$A + C = B + C,$$

équivalente à la proposée. En effet, toute valeur de x, qui satisfait à la première équation, satisfait aussi à la seconde; car, si aux deux quantités égales A et B on ajoute la même quantité C, on obtient deux quantités égales $A + C$ et $B + C$. Réciproquement, toute valeur de x qui satisfait à la seconde équation, satisfait aussi à la première; car, si des deux quantités égales $A + C$ et $B + C$ on retranche la même quantité C, on obtient deux restes égaux A et B. Les deux équations, admettant les mêmes solutions, sont donc équivalentes.

On démontrerait de la même manière qu'en retranchant une même quantité C des deux membres de l'équation proposée, on forme une nouvelle équation équivalente

$$A - C = B - C.$$

80. Corollaire I. *Un terme quelconque d'une équation peut être écrit dans l'autre membre avec un signe contraire.* Soit l'équation

$$6x - 7 = 13 + 2x.$$

Si nous ajoutons 7 aux deux membres, l'équation devient

$$6x = 13 + 2x + 7;$$

le terme 7, qui avait le signe — dans le premier membre, est passé dans le second membre avec le signe +. De même, si nous retranchons $2x$ des deux membres, l'équation devient

$$6x - 2x = 13 + 7;$$

le terme $2x$, qui avait le signe $+$ dans le second membre, est passé dans le premier avec le signe $-$.

81. Corollaire II. ***On peut changer les signes de tous les termes d'une équation.*** Soit l'équation

$$10 - 3x = 5x - 6.$$

Si l'on fait passer dans le second membre tous les termes du premier et réciproquement, cette équation devient

$$-5x + 6 = -10 + 3x,$$

ou, en transposant les deux membres

$$-10 + 3x = -5x + 6.$$

Théorème II.

82. ***Si l'on multiplie ou si l'on divise les deux membres d'une équation par une même quantité ne renfermant aucune inconnue, on transforme cette équation en une équation équivalente.***

En vertu du théorème précédent, nous pouvons supposer que l'on a fait passer tous les termes de l'équation dans le premier membre, de sorte que, si nous appelons A ce premier membre, l'équation sera représentée par

$$A = 0.$$

Une solution de cette équation est une valeur de x qui rend l'expression algébrique A égale à zéro. En multipliant tous les termes de cette équation par un nombre donné m, nous formerons une nouvelle équation

$$mA = 0,$$

équivalente à l'équation proposée. En effet, toute valeur de x qui satisfait à la première équation satisfait aussi à la seconde; car, si la quantité A est nulle, le produit de cette quantité par le nombre m est aussi nul. Réciproquement,

toute valeur de x qui satisfait à la seconde équation satisfait aussi à la première; car, si le produit mA est nul, il faut que l'un des deux facteurs le soit; mais le nombre donné m n'est pas nul; donc l'autre facteur A est nécessairement nul. Les deux équations, admettant les mêmes solutions, sont équivalentes.

De même, si l'on divise tous les termes par un même nombre m, on transforme l'équation proposée en une autre

$$\frac{A}{m} = 0$$

équivalente.

83. Remarque. Pour la rigueur du raisonnement, il importe que le multiplicateur m ne soit ni nul, ni infini, et pour cela il faut que ce multiplicateur ne contienne pas l'inconnue. Supposons, par exemple, que l'on ait multiplié par $x - 2$; l'équation

$$(x - 2)A = 0$$

admet bien toutes les solutions de l'équation $A = 0$; mais elle admet en outre la solution $x = 2$, qui annule le multiplicateur. Ainsi, la seconde équation n'est pas équivalente à la première, puisque, outre les solutions de la première, elle en admet encore une autre.

On voit comment la multiplication par une quantité contenant l'inconnue introduit dans l'équation des solutions étrangères à la question. Quand une semblable opération sera nécessaire, on tiendra compte de cette circonstance, et parmi les solutions trouvées, on distinguera celles qui satisfont réellement à l'équation proposée.

Au contraire la division, par une quantité contenant l'inconnue, peut faire disparaître une ou plusieurs solutions de la question.

84. Corollaire. *On fait disparaître les dénominateurs*

d'une équation en multipliant tous les termes de l'équation par le plus petit multiple des dénominateurs.

Soit l'équation

$$\frac{7x}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{5x}{12}.$$

Le plus petit multiple de tous les dénominateurs est 24. Si nous multiplions tous les termes de l'équation par 24, il est clair que les dénominateurs disparaissent; l'équation devient

$$21x-18=4+10x.$$

Pour faire cette multiplication, on multiplie le numérateur de chaque terme par le quotient du plus petit multiple par le dénominateur, et l'on ôte ce dénominateur; ainsi, nous avons multiplié les numérateurs par les quotients 3, 6, 4, 2 du plus petit multiple 24 par les différents dénominateurs.

Si l'équation ne contient qu'un seul dénominateur, on multipliera par ce dénominateur.

Si l'on éprouve quelque difficulté à trouver le plus petit multiple, on multipliera par le produit des dénominateurs, qui est un multiple commun.

85. Nous pouvons énoncer maintenant la règle à suivre pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue : 1° *on chasse les dénominateurs s'il y en a;* 2° *on fait passer les termes inconnus dans le premier membre, les termes connus dans le second membre, et l'on réduit les uns et les autres;* 3° *enfin on divise par le coefficient de l'inconnue.*

Reprenons l'équation

$$\frac{7x}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{5x}{12}.$$

Chassons d'abord les dénominateurs, cette équation devient

$$21x-18=4+10x.$$

Ensuite, faisons passer les termes inconnus dans le premier membre, les termes connus dans le second, nous avons

$$21x - 10x = 4 + 18,$$

ou, en réduisant,

$$11x = 22.$$

Enfin, divisons par 11, il vient

$$x = \frac{22}{11} = 2.$$

On voit que la méthode consiste à transformer l'équation proposée en une série d'équations équivalentes, jusqu'à ce que l'on arrive à une équation de la forme $x = 2$. Mais cette dernière équation est évidemment satisfaite, si l'on donne à l'inconnue la valeur 2, et ne l'est par aucune autre valeur; donc l'équation proposée, qui est équivalente à cette dernière, admet la solution $x = 2$ et n'en admet aucune autre.

86. Considérons encore l'équation

$$\frac{x}{4} + 7 = \frac{2x}{3} - 3,$$

que nous avons déjà résolue (n° 9). Les deux dénominateurs étant premiers entre eux, leur plus petit multiple est leur produit; on multipliera donc par 12, ce qui donne

$$3x + 84 = 8x - 36.$$

On en déduit, par la transposition des termes,

$$3x - 8x = -36 - 84,$$
$$-5x = -120,$$

et, en changeant les signes des deux membres,

$$5x = 120,$$

d'où

$$x = \frac{120}{5} = 24.$$

RÉSOLUTION DE DEUX ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES.

87. Si l'on n'avait qu'une équation à deux inconnues x et y, l'équation admettrait une infinité de solutions; car on pourrait donner à x une valeur quelconque, et il en résulterait pour y une valeur correspondante. La question serait donc indéterminée.

Soit, par exemple, l'équation

$$5x - 3y = 9,$$

qui, résolue par rapport à y, s'écrit

$$y = \frac{5x - 9}{3}.$$

Si l'on donne à x les valeurs 2, 3, 4, ..., on trouve pour y les valeurs $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{11}{3}$....... Ainsi l'équation est satisfaite par les systèmes de valeurs

$$x = 2, \quad y = \frac{1}{2},$$
$$x = 3, \quad y = 2,$$
$$x = 4, \quad y = \frac{11}{3},$$

. . . .

. . . .

Chacun d'eux constitue une solution de l'équation proposée, et il y en a une infinité.

Les théorèmes I et II, et les transformations qui en résultent, sont vrais d'une manière générale et s'appliquent aux équations à plusieurs inconnues. Mais alors il faut entendre par équations équivalentes deux équations qui admettent les mêmes solutions en nombre infini.

Si l'on a deux équations simultanées à deux inconnues,

l'indétermination disparaît ; on ne peut plus prendre x arbitrairement ; car il faut que les valeurs de x et de y satisfassent à la fois aux deux équations.

88. Parmi les diverses méthodes employées pour effectuer cette résolution, l'une des meilleures et des plus usitées est celle dite de *substitution*. Nous l'avons déjà fait connaître dans l'introduction (n° 21). *Elle consiste à tirer de l'une des deux équations proposées la valeur de l'une des inconnues comme si l'autre était connue, et à substituer cette valeur dans l'autre équation ;* on obtient ainsi une équation à une inconnue que l'on résout par le procédé ordinaire.

Soient les deux équations simultanées

$$(1) \qquad 5x - 3y = 9,$$

$$(2) \qquad 7x + 11y = 43,$$

que nous numérotons, afin d'abréger le discours. De la première tirons la valeur de y, comme si la valeur de x était connue, nous avons

$$(3) \qquad y = \frac{5x - 9}{3}.$$

Substituons cette expression à la place de y dans la seconde équation, nous obtiendrons une équation à une inconnue

$$(4) \qquad 7x + 11\,\frac{5x - 9}{3} = 43.$$

Cette équation, résolue par le procédé habituel, nous donne $x = 3$. En portant cette valeur dans l'expression (3) de y, nous trouvons $y = 2$. Telles sont les valeurs des deux inconnues.

89. Il est aisé de voir que cette méthode remplace le système des deux équations proposées (1) et (2) par le système équivalent des deux équations (3) et (4). En effet, nous remarquons d'abord que l'équation (3) n'est autre que

l'équation (1) transformée. Si donc, pour certaines vale
de x et de y, les équations (1) et (2) sont satisfaites,
quation (3), qui est la même que l'équation (1), le s
évidemment, et aussi l'équation (4), qui ne diffère de
quation (2) qu'en ce que la quantité y a été remplacée
une quantité égale $\frac{5x-9}{3}$. Réciproquement, si, pour
taines valeurs de x et de y, les équations (3) et (4) s
satisfaites, l'équation (1), qui est la même que l'équation
le sera évidemment, et aussi l'équation (2) qui ne dif
de l'équation (4) qu'en ce que la quantité $\frac{5x-9}{3}$ a
remplacée par la quantité égale y. Les deux systèmes
quations admettent donc les mêmes solutions, et par c
séquent sont équivalents.

Mais l'équation (4), transformée, devient

$$x = 3.$$

On peut donc remplacer le système proposé par le syst
équivalent

$$(3) \qquad y = \frac{5x-9}{3},$$

$$(5) \qquad x = 3.$$

L'équation (5) n'est satisfaite que par la valeur $x =$
pour satisfaire en même temps à l'équation (3), il
donner à y la valeur 2. Ainsi ce dernier système d'éq
tions, et par conséquent le système proposé, admet la
lution $x = 3$, $y = 2$, et n'en admet pas d'autre.

Exemples.

90. Dans la pratique, on profitera de toutes les cir
stances qui permettent de simplifier le calcul.

1° Résoudre les deux équations

$$7y - 4x = 2,$$
$$5y + 4x = 22.$$

Les deux coefficients de x étant les mêmes, on tirera de la première équation la valeur de x,

$$x = \frac{7y - 2}{4},$$

et on substituera dans la seconde, ce qui donne

$$5y + 4\,\frac{7y - 2}{4} = 22.$$

Le dénominateur 4 disparaît de lui-même, et l'équation s'écrit plus simplement

$$5y + 7y - 2 = 22,$$

d'où l'on déduit

$$y = 2,$$

et, en portant cette valeur dans l'expression de x,

$$x = 3.$$

2° Résoudre les deux équations

$$17x - 10y = 11,$$
$$13x - 5y = 19.$$

Le coefficient de y, dans la première équation, étant un multiple du coefficient de y dans la seconde, on tirera de celle-ci la valeur de y,

$$y = \frac{13x - 19}{5},$$

que l'on substituera dans la première, ce qui donne

$$17x - 10\,\frac{13x - 19}{5} = 11,$$

ou, plus simplement,

$$17x - 2(13x - 19) = 11.$$

On en déduit

$$x = 3, \qquad y = 4.$$

3° Résoudre les équations

$$8x - 11y = 1,$$
$$19y - 12z = 11.$$

Les deux coefficients de x ayant un commun diviseur, première équation on tirera

$$x = \frac{1 + 11y}{8},$$

et on substituera dans la seconde, ce qui donne

$$19y - 12\frac{1 + 11y}{8} = 11.$$

Si l'on divise par 4 les deux termes de la fraction, équation se simplifie et devient

$$19y - 3\frac{1 + 11y}{2} = 11.$$

On en déduit

$$y = 5, \qquad x = 7.$$

RÉSOLUTIONS DE TROIS ÉQUATIONS DU PREMIER DEG A TROIS INCONNUES.

91. La marche à suivre est toujours la même : *d des trois équations proposées on tirera la valeur de des inconnues, comme si les valeurs des deux autres connues, et on substituera cette valeur dans les équations*. On obtiendra ainsi deux équations à de connues que l'on résoudra par le procédé indiqué demment.

Soient les trois équations

(1) $$5y - 7x + 3z = 4,$$
(2) $$4x + 9y - 5z = 30,$$
(3) $$2x - 3y + 6z = 1.$$

Si de la première on tire

(4) $$z = \frac{4 + 7x - 5y}{3},$$

et, si l'on substitue dans les deux autres, on a les deux équations à deux inconnues

$$(5)\qquad 4x + 9y - 5\,\frac{4 + 7x - 5y}{3} = 30,$$

$$(6)\qquad 2x - 3y + 6\,\frac{4 + 7x - 5y}{3} = 1,$$

qui, simplifiées, deviennent

$$52y - 23x = 110,$$
$$13y - 16x = 7.$$

La question est ramenée ainsi à la résolution de deux équations à deux inconnues. Si de la dernière on tire

$$(7)\qquad y = \frac{7 + 16x}{13},$$

et, si l'on substitue dans la précédente, on a l'équation à une inconnue

$$(8)\qquad 52\,\frac{7 + 16x}{13} - 23x = 110,$$

ou, plus simplement,

$$4(7 + 16x) - 23x = 110.$$

Cette dernière équation, résolue, donne $x = 2$. Portant cette valeur dans l'équation (7), on en déduit $y = 3$; portant ces deux valeurs dans l'équation (4), on a enfin $z = 1$. Telles sont les valeurs des trois inconnues.

92. Il est aisé de voir que la méthode transforme le système des trois équations proposées en un système équivalent des trois équations (4), (5) et (6). En effet, l'équation (4) est la même que l'équation (1), et les équations (5) et (6) se déduisent des équations (2) et (3), en remplaçant z par une quantité égale, ou réciproquement.

Mais le système des deux équations (5) et (6) peut être remplacé à son tour par le système équivalent des deux équations (7) et (8), et cette dernière, résolue, devient

$x = 2$. Ainsi, le système des trois équations proposées est transformé dans le système équivalent

$$z = \frac{4 + 7x - 5y}{3},$$
$$y = \frac{7 + 16x}{13},$$
$$x = 2.$$

La dernière équation n'est satisfaite que par la valeur $x = 2$; pour satisfaire en même temps à la seconde, il faut donner à y la valeur 3, et pour satisfaire à la première, il faut donner à z la valeur 1. Ainsi ce dernier système, et par conséquent le système proposé, admet la solution

$$x = 2, \quad y = 3, \quad z = 1,$$

et n'en admet pas d'autre.

Exemples.

93. Dans chaque cas particulier, on dirigera les calculs de manière à les simplifier autant que possible.

1° Résoudre les trois équations

$$x + y + z = 6,$$
$$x + 2y + 3z = 10,$$
$$x + 4y + 9z = 20.$$

Si de la première on tire

$$x = 6 - y - z,$$

et que l'on substitue dans les deux autres, on a les deux équations à deux inconnues

$$6 - y - z + 2y + 3z = 10,$$
$$6 - y - z + 4y + 9z = 20,$$

qui, simplifiées, deviennent

$$y + 2z = 4,$$
$$3y + 8z = 14.$$

On résoudra ces deux équations en tirant de la première

$$y = 4 - 2z,$$

et, substituant dans la seconde, ce qui donne

$$3(4 - 2z) + 8z = 14,$$

d'où

$$z = 1.$$

Portant cette valeur dans l'expression de y, on trouve $y = 2$; portant ces deux valeurs dans l'expression de x, on a $x = 3$.

2° Résoudre les trois équations

$$5x - 7y = 2,$$
$$4y - 3z = 1,$$
$$2x - z = 7.$$

Les trois inconnues n'entrent pas dans chacune des trois équations et le calcul est plus simple. Si de la troisième équation on tire

$$z = 2x - 7,$$

et que l'on substitue dans la seconde, on a

$$4y - 3(2x - 7) = 1,$$

plus simplement

$$6x - 4y = 20,$$

ou

$$3x - 2y = 10.$$

Cette équation, jointe à la première qui ne contient pas z, forme un système de deux équations à deux inconnues

$$5x - 7y = 2,$$
$$3x - 2y = 10.$$

Si de la dernière on tire

$$y = \frac{3x - 10}{2},$$

et que l'on substitue dans la précédente, on a l'équation à une inconnue

$$5x - 7\frac{3x - 10}{2} = 2.$$

On déduit de là

$$x=6, \quad y=4, \quad z=5.$$

3° Résoudre les trois équations

$$8x-3y=47,$$
$$3x+2y-2z=19,$$
$$2x+3z-3y=17.$$

Si de la seconde équation on tire

$$z=\frac{3x+2y-19}{2},$$

et que l'on substitue dans la troisième, on a l'é(

$$2x+3\frac{3x+2y-19}{2}-3y=17,$$

qui, simplifiée, se réduit à

$$13x=91.$$

Cette équation donne immédiatement $x=7$. La x étant connue, on tirera de la première équatio: en portant ces deux valeurs dans l'expression de z $z=4$.

RÉSOLUTION D'UN NOMBRE QUELCONQUE D'ÉQUA]
DU PREMIER DEGRÉ.

94. La méthode de substitution, que nous avons (pour deux et pour trois équations, s'applique sans à un plus grand nombre d'équations. Supposons ait à résoudre n équations à n inconnues. De la équation on tirera la valeur de la première inconnu(substituera dans toutes les autres équations, ce qui $n-1$ équations à $n-1$ inconnues qui, jointes à mière, formeront un système équivalent au système De la seconde équation de ce second système, on même la valeur de la seconde inconnue que l'on su

dans toutes les suivantes ; et le système proposé sera transformé en un système équivalent composé d'une équation à n inconnues, d'une à $n-1$ inconnues, et de $n-2$ équations à $n-2$ inconnues. On continuera de la même manière jusqu'à ce que l'on arrive à une équation à une inconnue, et alors le système des n équations sera transformé en un système équivalent de n équations, contenant, la première les n inconnues, la seconde $n-1$, la troisième $n-2, \ldots$, enfin la dernière une seule inconnue. De cette équation, on déduira la valeur de la dernière inconnue, et en remontant de proche en proche, on trouvera successivement les valeurs de toutes les inconnues.

Appliquons cette méthode à la résolution de quatre équations à quatre inconnues.

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x - 2y + z - 3u &= 1, \\ 7y - 2x - 4z + 12u &= 4, \\ 3x + y - 3z + u &= 9, \\ 2z - x - y + 7u &= 6. \end{aligned}\right.$$

De la première équation tirons la valeur de x, substituons-la dans toutes les autres et simplifions, nous transformerons le système des équations proposées en un autre équivalent

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} x &= 1 + 2y - z + 3u, \\ 3y - 2z + 6u &= 6, \\ 7y - 6z + 10u &= 6, \\ 3z - 3y + 4u &= 7. \end{aligned}\right.$$

De la seconde équation de ce second système, tirons la valeur de y et substituons-la dans les deux suivantes, nous obtenons le troisième système

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x &= 1 + 2y - z + 3u, \\ y &= \frac{6 + 2z - 6u}{3}, \\ z + 3u &= 6, \\ z + 10u &= 13. \end{aligned}\right.$$

Si de la troisième équation de ce troisième système nous tirons la valeur de z pour la substituer dans la dernière équation, nous arriverons enfin au système

$$(4) \quad \begin{cases} x = 1 + 2y - z + 3u, \\ y = \dfrac{6 + 2z - 6u}{3}, \\ z = 6 - 3u, \\ u = 1. \end{cases}$$

En remontant de proche en proche, on trouve

$$u = 1, \quad z = 3, \quad y = 2, \quad x = 5.$$

Exemples.

95. Dans un grand nombre de cas, on abrége beaucoup les calculs en dirigeant convenablement les substitutions.

1° Résoudre les cinq équations à cinq inconnues

$$\begin{cases} y + 2x = 4, \\ z + 3y = 9, \\ u + 4z = 16, \\ v + 5u = 25, \\ x + y + z + u + v = 15. \end{cases}$$

On tire de la première

$$y = 4 - 2x;$$

de la seconde, en y remplaçant y par sa valeur,

$$z = 6x - 3;$$

de la troisième, en y remplaçant z par sa valeur,

$$u = 28 - 24x;$$

de la quatrième, en y remplaçant u par sa valeur,

$$v = 120x - 115.$$

Les quatre inconnues y, z, u, v, sont exprimées ainsi au moyen de x; si l'on substitue ces valeurs dans la cinquième

équation, on obtiendra une équation à une seule inconnue

$$101x = 101,$$

d'où

$$x = 1.$$

En portant cette valeur de x dans les expressions précédentes, on trouve

$$y = 2, \quad z = 3, \quad u = 4, \quad z = 5.$$

2° Résoudre les quatre équations à quatre inconnues

$$\left\{\begin{array}{l} x + 5z = 29, \\ 3y - 2x + u = 5, \\ 4u - 3z = 13, \\ 9x - 7y - 2u = 8. \end{array}\right.$$

Si de la première et de la troisième on tire

$$x = 29 - 5z,$$
$$u = \frac{13 + 3z}{4},$$

et que l'on substitue ces valeurs dans les deux autres, on aura deux équations à deux inconnues

$$12y + 43z = 239,$$
$$14y + 93z = 493.$$

Si de la première de ces deux équations on tire

$$y = \frac{239 - 43z}{12},$$

et que l'on substitue dans la seconde, on obtient une équation à une inconnue

$$257z = 1285.$$

d'où

$$z = 5.$$

En portant cette valeur dans les expressions précédentes, on trouve

$$y = 2, \quad u = 7, \quad x = 4.$$

COMBINAISON DES ÉQUATIONS.

96. Souvent une combinaison des équations proposées facilite beaucoup la résolution. Exemples :

1° Trouver deux nombres, connaissant leur somme a et leur différence b.

En appelant x et y les deux nombres cherchés, on a les deux équations

$$x+y=a,$$
$$x-y=b.$$

Ajoutons ces deux équations membre à membre, nous aurons

$$2x=a+b,$$

d'où

$$x=\frac{a+b}{2}.$$

Retranchons la seconde équation de la première, nous aurons de même

$$y=\frac{a-b}{2}.$$

2° Trouver quatre nombres, connaissant leurs sommes trois à trois. On aura à résoudre les quatre équations

$$y+z+u=a,$$
$$z+u+x=b,$$
$$u+x+y=c,$$
$$x+y+z=d,$$

En ajoutant ces quatre équations, on a

$$3x+3y+3z+3u=a+b+c+d;$$

d'où l'on déduit la somme des quatre inconnues

$$x+y+z+u=\frac{a+b+c+d}{3}.$$

Si maintenant de cette nouvelle équation on retranche

chacune des équations proposées, on trouve immédiatement les valeurs des inconnues

$$x=\frac{a+b+c+d}{3}-a,$$
$$y=\frac{a+b+c+d}{3}-b,$$
$$z=\frac{a+b+c+d}{3}-c,$$
$$u=\frac{a+b+c+d}{3}-d.$$

3° Trouver quatre nombres, connaissant l'excès de la somme de trois quelconques d'entre eux sur le quatrième. On aura à résoudre les quatre équations

$$y+z+u-x=a,$$
$$z+u+x-y=b,$$
$$u+x+y-z=c,$$
$$x+y+z-u=d.$$

En ajoutant ces quatre équations, on a l'équation

$$2x+2y+2z+2u=a+b+c+d,$$

d'où l'on déduit la somme des inconnues

$$x+y+z+u=\frac{a+b+c+d}{2}.$$

Si maintenant de cette nouvelle équation on retranche chacune des équations proposées, on trouve

$$2x=\frac{a+b+c+d}{2}-a,$$
$$2y=\frac{a+b+c+d}{2}-b,$$

. . . .
. . . .

d'où

$$x=\frac{a+b+c+d}{4}-\frac{a}{2},$$
$$y=\frac{a+b+c+d}{4}-\frac{b}{2},$$

. . . .
. . . .

4° Résoudre les quatre équations

$$\begin{aligned} x+2y+3z+4u&=a,\\ y+2z+3u+4x&=b,\\ z+2u+3x+4y&=c,\\ u+2x+3y+4z&=d. \end{aligned}$$

En ajoutant ces quatre équations, on obtient une équation

$$10x+10y+10z+10u=a+b+c+d,$$

qui donne la somme des quatre inconnues

$$x+y+z+u=\frac{a+b+c+d}{10}.$$

Pour abréger, nous désignerons par la lettre m le second membre qui est connu.

En retranchant la seconde équation de la première, la troisième de la seconde, la quatrième de la troisième, la première de la quatrième, on obtient les équations

$$\begin{aligned} y+z+u-3x&=a-b,\\ z+u+x-3y&=b-c,\\ u+x+y-3z&=c-d,\\ x+y+z-3u&=d-a. \end{aligned}$$

Mais nous avons trouvé

$$x+y+z+u=m.$$

Si donc de cette dernière équation on retranche chacune des précédentes, on obtient les valeurs des inconnues

$$x=\frac{m-a+b}{4};$$

$$y=\frac{m-b+c}{4},$$

$$z=\frac{m-c+d}{4},$$

$$u=\frac{m-d+a}{4}.$$

97. La méthode dont nous venons de faire quelques applications repose sur le théorème suivant, dont on se sert fréquemment en mathématiques.

THÉORÈME III. *Étant données plusieurs équations, on peut remplacer l'une d'elles par l'équation obtenue en ajoutant ou retranchant les équations proposées membre à membre.*

Considérons d'abord deux équations

(1) $A = 0,$

(2) $B = 0,$

que l'on peut toujours mettre sous cette forme en faisant passer tous les termes dans le premier membre. Si on les ajoute membre à membre, on forme une nouvelle équation

(3) $A + B = 0,$

qui peut remplacer l'une des équations combinées, par exemple la deuxième, et le système des deux équations

(1) $A = 0,$

(3) $A + B = 0,$

sera équivalent au système des deux équations proposées. En effet, si, pour de certaines valeurs des inconnues, les équations (1) et (2) sont satisfaites, l'équation (3) le sera aussi; car, les deux quantités A et B devenant nulles, leur somme $A + B$ est aussi nulle. Réciproquement, si les deux équations (1) et (3) sont satisfaites, l'équation (2) le sera aussi; car la somme $A + B$ étant nulle, ainsi que la première partie A, il est nécessaire que la seconde partie B le soit aussi. Les deux systèmes, admettant les mêmes solutions, sont équivalents.

De même si, au lieu d'ajouter, on retranche les équations membre à membre, on obtient un système

$$A = 0,$$
$$A - B = 0,$$

équivalent au système proposé.

98. Corollaire. Avant d'ajouter ou de retrancher le
équations proposées, on peut multiplier les deux membre
de chacune d'elles par un nombre arbitraire; car on sa
que, lorsqu'on multiplie tous les termes d'une équation pa
un même nombre, l'équation reste équivalente à elle-même
Si donc, avant d'ajouter, nous multiplions la première équa
tion par m, la seconde par n, nous obtiendrons le systèm

$$A = 0,$$
$$mA + nB = 0,$$

équivalent au système proposé.

Ceci donne le moyen d'éliminer une inconnue entre deu
équations; il suffit pour cela de multiplier les deux équa
tions par des nombres tels, que les deux coefficients de l'in
connue qu'on veut éliminer deviennent égaux entre eux
puis d'ajouter ou retrancher suivant qu'ils ont des signe
contraires ou le même signe.

Soient, par exemple, les deux équations

$$11x - 3y = 10,$$
$$9x + 5y = 38.$$

Si nous multiplions la première par 5, la seconde par 3, ce
deux équations deviennent

$$55x - 15y = 50,$$
$$27x + 15y = 114.$$

Si maintenant on ajoute membre à membre, l'inconnue disparaît, et l'on obtient une équation à une inconnue

$$82x = 164,$$

d'où

$$x = 2.$$

En remplaçant x par sa valeur dans l'une des deux équation
proposées, et résolvant par rapport à y, on trouve $y = 4$.

Ce procédé d'élimination, que l'on appelle méthode de r
duction au même coefficient, réussit toujours quand on mult

plie la première équation par le coefficient de l'inconnue qu'on veut éliminer dans la seconde équation, et la seconde équation par le coefficient de la même inconnue dans la première; car, après cette opération, l'inconnue dont il s'agit a dans les deux équations un coefficient égal au produit des deux coefficients primitifs. Mais il suffira, si l'on aperçoit aisément le plus petit multiple des deux coefficients, de rendre ces deux coefficients égaux à ce plus petit multiple.

Soient les deux équations

$$4x + 7y = 27,$$
$$6x - 13y = 17.$$

On voit de suite que les deux coefficients de x ont pour plus petit multiple 12; pour éliminer x, on multipliera la première équation par 3, la seconde par 2; les deux équations deviennent

$$12x + 21y = 81,$$
$$12x - 26y = 34.$$

Puis on retranchera la seconde équation de la première, ce qui donne

$$47y = 47,$$

d'où

$$y = 1.$$

En portant cette valeur de y dans la première équation et résolvant, on trouve $x = 5$.

99. Le théorème que nous avons démontré s'étend sans difficulté à un nombre quelconque d'équations.

Soient les trois équations

(1) $$A = 0,$$
(2) $$B = 0,$$
(3) $$C = 0.$$

Si on les ajoute membre à membre, on forme une nouvelle équation

(4) $$A + B + C = 0,$$

qui peut remplacer l'une des équations combin
exemple la troisième ; et l'on obtient ainsi un syst

$$(1) \qquad A = 0,$$
$$(2) \qquad B = 0,$$
$$(4) \qquad A + B + C = 0,$$

équivalent au système proposé.

Il est évident en effet que, lorsque les trois équat (2), (3) sont satisfaites, l'équation (4) l'est aussi réciproquement, lorsque les équations (1), (2), satisfaites, l'équation (3) l'est aussi.

CHAPITRE II.

INTERPRÉTATION DES VALEURS NÉGATIVES DANS LES PROBLÈMES. — USAGE ET CALCUL DES QUANTITÉS NÉGATIVES.

---

100. Nous avons dit (n° 33) qu'un polynôme indique une série d'additions et de soustractions à effectuer, et nous avons appelé quantités *positives* les quantités à ajouter, quantités *négatives* les quantités à retrancher. Un polynôme se résumant finalement en une quantité à ajouter ou à retrancher, il a dans le premier cas une valeur positive, dans le second cas une valeur négative.

Nous avons généralisé les opérations algébriques de manière à les appliquer indistinctement aux polynômes, soit positifs, soit négatifs, et nous avons étendu les mêmes règles ou définitions aux termes considérés isolément, ce qui permet dans les calculs de remplacer les polynômes par leurs valeurs. Il est résulté de là un perfectionnement notable dans le mécanisme du calcul et dans la transformation des expressions algébriques, en ce sens que toute restriction a disparu, et qu'il n'y a pas à s'inquiéter de savoir si les polynômes sur lesquels on opère sont positifs ou négatifs.

La considération des quantités positives ou négatives n'est pas moins utile dans la résolution des problèmes. Elle permet, comme nous allons le voir, de comprendre dans les mêmes équations, et par suite dans les mêmes formules, les différents cas d'une même question.

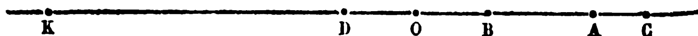
101. Problème I. *Un mobile, partant d'un point donné,*

parcourt sur une droite successivement plusieurs longueurs données. On demande à quelle distance il se trouve finalement du point de départ.

La question présente plusieurs cas différents, suivant que chacune des longueurs est parcourue dans un sens ou dans l'autre. Lorsque toutes les longueurs sont parcourues dans la même sens à la suite les unes des autres, elles s'ajoutent évidemment ; si donc on appelle a, b, c, d, ces diverses longueurs que, pour préciser, nous supposerons au nombre de quatre, et x la distance à laquelle le mobile se trouve finalement du point de départ, on aura la formule

$$x = a + b + c + d.$$

Grâce à la considération des quantités positives ou négatives, cette formule peut être étendue à tous les autres cas. En effet, soit O le point de départ du mobile sur la droite donnée ; imaginons un point K situé très-loin sur la gauche à une distance arbitraire très-grande m du point O,



et supposons pour un instant que l'on compte les distances à partir de ce point K. Au moment où le mobile part du point O, il est à la distance m du point K ; il parcourt ensuite des longueurs données dans un sens ou dans l'autre : il est clair que chaque longueur parcourue de gauche à droite, l'éloignant du point K, devra être ajoutée, et par conséquent regardée comme positive, et que chaque longueur parcourue en sens contraire, c'est-à-dire de droite à gauche, le rapprochant du point K, devra être retranchée, et par conséquent regardée comme négative. Si donc on représente par les lettres a, b, c, d, les longueurs données affectées chacune du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est parcourue de gauche à droite ou en sens contraire, on

aura la formule générale

$$m+x=m+a+b+c+d,$$

qui s'écrit plus simplement

$$x=a+b+c+d.$$

Lorsque le polynôme aura une valeur positive, la distance x, devant être ajoutée à m, sera comptée à partir du point O vers la droite; lorsque le polynôme aura une valeur négative, la distance x, devant être retranchée de m, sera comptée à partir du point O vers la gauche.

Supposons, par exemple, que le mobile parcoure une première longueur OA de 5 mètres de gauche à droite, une seconde AB de 3 mètres en sens contraire, une troisième BC de 4 mètres de gauche à droite, et enfin une quatrième CD de 8 mètres en sens inverse; affectant chacune d'elles du signe convenable, on fera

$$a=+5,\quad b=-3,\quad c=+4,\quad d=-8.$$

La formule générale indique qu'il faut faire la somme algébrique des quantités représentées par les lettres a, b, c, d; or, on sait que l'addition algébrique consiste à écrire les quantités avec leurs signes; on aura donc, en remplaçant les lettres par leurs valeurs,

$$x=5-3+4-8=-2.$$

Cette valeur -2 signifie qu'il faut de la distance m retrancher 2 mètres; ainsi le point d'arrivée D sera à 2 mètres du point de départ O vers la gauche.

102. Problème II. *On connaît l'âge d'un père et celui de son fils, et l'on demande à quelle époque l'âge du père sera ou a été triple de l'âge du fils.*

Appelons a l'âge actuel du père, b l'âge du fils, le rapport actuel de l'âge du père à l'âge du fils est $\frac{a}{b}$. On sait

que lorsqu'on augmente d'une même quantité les deux termes d'une fraction plus grande que l'unité, la fraction diminue; donc, si le rapport des âges est actuellement plus grand que 3, il arrivera un moment où il sera égal à 3; mais s'il est actuellement plus petit que 3, il a été autrefois égal à 3. Ainsi la question présente deux cas bien distincts, suivant que l'époque cherchée est dans l'avenir ou dans le passé. Dans le premier cas il faudra ajouter aux âges actuels un certain nombre d'années; dans le second cas, en retrancher un certain nombre d'années. Si donc on désigne par la lettre x ce nombre d'années, affecté du signe + ou du signe — suivant qu'il doit être ajouté ou retranché, l'équation

$$\frac{a+x}{b+x}=3$$

conviendra à tous les cas de la question. On en déduit la formule

$$x=\frac{a-3b}{2}.$$

A l'inspection de cette formule, on reconnaît en effet que, si a est plus grand que $3b$, c'est-à-dire si l'âge du père est actuellement plus grand que trois fois l'âge du fils, l'inconnue x a une valeur positive, et que, dans le cas contraire, elle a une valeur négative.

Pour montrer une application de cette formule, supposons que le père ait 40 ans, le fils 10 (nº 12). En remplaçant a et b par leurs valeurs, on trouve

$$x=+5.$$

Cette valeur positive indique qu'il faut ajouter 5 ans aux âges actuels; ainsi l'âge du père sera dans 5 ans triple de l'âge du fils. Et en effet, à cette époque le père aura 45 ans et le fils 15, et 45 est bien le triple de 15.

Supposons maintenant que le père ait actuellement 45 ans, le fils 17. La formule donne

$$x = -3.$$

Cette valeur négative indique qu'il faut retrancher 3 ans des âges actuels; ainsi l'âge du père était, il y a 3 ans, triple de l'âge du fils.

103. Remarque I. Nous voyons par ce qui précède que certaines espèces de grandeurs sont susceptibles d'être comptées dans deux sens, inverses l'un de l'autre. Ainsi, partant d'un point quelconque, on peut marcher sur une ligne dans un sens ou dans le sens opposé. On regardera comme positives les longueurs parcourues dans un sens convenu (par exemple de gauche à droite si la ligne est horizontale), celle portées en sens inverse comme négatives.

On comprend bien la signification de ce double signe affectant les longueurs, si l'on imagine un point K très-éloigné vers la gauche (voyez n° 101), d'où l'on suppose pour un instant que l'on compte les distances; la distance du mobile à cette origine fictive augmentera si la longueur est parcourue de gauche à droite, et diminuera si elle l'est en sens contraire.

Le temps présente aussi deux sens opposés. Compté à partir d'un instant quelconque, si l'on en descend le cours, c'est-à-dire si l'on marche vers l'avenir, il sera naturellement affecté du signe $+$; au contraire, si l'on remonte vers le passé, il sera affecté du signe $-$. En effet, que l'on imagine une origine fictive très-reculée, le temps, compté à partir de cette origine fictive, sera augmenté dans le premier cas, diminué dans le second cas. Par exemple, dans les calculs qui se rapportent à notre siècle, les astronomes ont coutume de compter le temps à partir du 1er janvier 1800; si l'on marche de 10 ans en avant ou en ar-

rière, on aura un temps représenté par $+10$ ou par -10 et en effet, en rapportant à l'origine ordinaire qui est beaucoup plus reculée, savoir le commencement de l'ère chrétienne, on aurait

$$1800+10 \quad \text{ou} \quad 1800-10.$$

Il en est de même des degrés de température marqués par le thermomètre. Les Français prennent pour origine la température de la glace fondante; c'est là qu'est marqué le zéro. Au-dessus, les degrés sont positifs, au-dessous négatifs. Et en effet, que l'on imagine une température plus basse que toutes celles que l'on aura à considérer, et que l'on compte les degrés à partir de ce point; à la glace fondante correspondra un certain nombre de degrés m; la température $+5$, ou 5 degrés au-dessus de o, signifie $m+5$; la température -5, ou 5 degrés au-dessous de o, signifie $m-5$.

104. PROBLÈME III. *Un mobile, se mouvant uniformément sur une droite avec une vitesse donnée, passe au point* O *à un certain instant. Déterminer sa position à un instant quelconque.*

En mécanique, on évalue ordinairement les longueurs en mètres, les temps en secondes, et l'on appelle vitesse l'espace parcouru par le mobile en une seconde.

Supposons d'abord que le mobile marche de gauche à droite avec une vitesse a, et que l'on demande sa position t secondes après qu'il a passé au point O. Le mobile parcourant a mètres par seconde, parcourt $2a$ mètres en 2 secondes, $3a$ mètres en 3 secondes, en général at mètres en t secondes; si donc on appelle x la distance parcourue dans le temps t, on aura l'équation

$$x=at,$$

et cette distance, portée à partir du point O vers la droite

nous donnera la position M du mobile au moment que l'on considère.



Cette formule est générale et convient à tous les cas de la question, si l'on affecte chaque quantité du signe convenable. On demande la position M du mobile, un temps quelconque *après* ou *avant* le moment où le mobile passe au point O; désignons par t ce temps, considéré comme positif dans le premier cas, comme négatif dans le second cas, et par x la distance OM, affectée du signe + ou du signe —, suivant que le point M est à droite ou à gauche du point O. La vitesse a sera elle-même positive ou négative, suivant que le mobile marche à gauche ou à droite ou en sens contraire; car, si l'on imagine les distances comptées à partir d'un point K très-éloigné vers la gauche, l'espace parcouru en une seconde, ou la vitesse, s'ajoutera dans le premier cas et se retranchera dans le second cas. Concevons maintenant que l'on compte le temps à partir d'une époque suffisamment reculée, et soit G la position du mobile à cet instant (si la vitesse est positive, le point G est très-loin vers la gauche; si elle est négative, il est au contraire très-loin vers la droite). Nous pouvons toujours supposer le point K, origine fictive des distances, situé à gauche du point G, et nous appellerons m la distance KG. Désignons par α le temps qui s'écoule depuis l'origine fictive des temps, c'est-à-dire depuis le moment où le mobile est en G, jusqu'au moment où il passe au point O; l'espace GO, parcouru pendant ce temps et affecté du signe convenable, est $a\alpha$. Le temps qui s'écoule depuis cette même origine jusqu'au moment où le mobile vient en M, sera représenté par $\alpha + t$, et l'espace parcouru GM, affecté du signe convenable, par $a(\alpha + t)$. Supposons que le mobile parte du point G, et parcoure successivement les che-

mins $a\alpha$ et x, ce qui l'amène au point O, puis au point M, sera finalement à une distance du point K marquée p $m+a\alpha+x$. Mais, le mobile arrivant au point M après le tem $\alpha+t$, et par conséquent après avoir parcouru l'espa $a(\alpha+t)$ à partir du point G, sa distance au point K (exprimée aussi par $m+a(\alpha+t)$; on a donc l'équation génér

$$m+a\alpha+x=m+a(\alpha+t),$$

ou, plus simplement,

$$x=at.$$

Voici quelques applications de cette formule ;

1° Le mobile se meut de gauche à droite avec une vite de 10 mètres par seconde ; on demande où il sera 6 second après avoir passé au point O. On fera $a=+10$, $t=+$ ce qui donne $x=+60$. Ainsi le mobile sera à 60 mèt à droite du point O, ce qui est évident *à priori*, puisque mobile marche vers la droite.

2° Le mobile se meut de gauche à droite avec une vite de 10 mètres par seconde ; on demande où il était 6 second avant d'arriver au point O. On fera $a=+10$, $t=-6$, d' $x=-60$. Ainsi le mobile était à 60 mètres à gauche du point ce qui est évident puisque le mobile vient de la gauche.

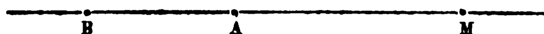
3° Le mobile se meut de droite à gauche avec une vite de 10 mètres par seconde ; on demande où il sera 6 secon après avoir passé au point O. On fera $a=-10$, $t=+$ ce qui donne $x=-60$. Ainsi le mobile sera à 60 mèt à gauche du point O ; ce qui est évident, puisque le m bile marche vers la gauche.

4° Le mobile se meut de droite à gauche avec une vite de 10 mètres par seconde ; on demande où il était 6 secon avant d'arriver au point O. On fera $a=-10$, $t=-6$; qui donne $x=+60$. Ainsi le mobile était à 60 mètre droite du point O, ce qui est évident, puisque le mob vient de la droite.

105. Problème IV. *Deux mobiles, se mouvant uniformément sur une même droite, passent au même instant, le premier au point* A, *le deuxième au point* B. *On connaît la vitesse de chacun d'eux. Trouver la position du point de rencontre de ces deux mobiles.*

Cette question présente plusieurs cas différents, suivant que les mobiles se meuvent dans un sens ou dans l'autre, et que la vitesse du premier est plus grande ou moins grande que celle du deuxième.

Supposons d'abord que les deux mobiles marchent tous deux de gauche à droite, et que le premier, celui qui est à droite au point A, aille moins vite que le deuxième qui est en B.



La rencontre aura évidemment lieu en un certain point M à droite du point A. Appelons a la vitesse du premier mobile, b celle du second, d la distance BA, t le temps inconnu après lequel aura lieu la rencontre, x et y les distances AM et BM des points A et B au point de rencontre M. Le premier mobile, parcourant a mètres par seconde, parcourra at mètres en t secondes ; on a donc l'équation

$$(1) \qquad x = at;$$

de même, le deuxième mobile, parcourant b mètres par seconde, parcourra bt mètres en t secondes, et l'on aura

$$(2) \qquad y = bt.$$

Mais la distance BM ou y devant être égale à BA plus AM, on a la troisième équation

$$(3) \qquad y = d + x.$$

On a ainsi trois équations à trois inconnues t, x, y, que l'on résoudra en substituant dans la troisième les valeurs

de x et de y données par les deux autres. On en déduit formules suivantes

$$(4)\qquad \begin{cases} t = \dfrac{d}{b-a}, \\ x = \dfrac{ad}{b-a}, \\ y = \dfrac{bd}{b-a}. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que ces trois équations, et par suite formules qui en résultent, conviennent à tous les cas de question, si l'on affecte chaque quantité du signe convenab D'après ce que nous avons dit précédemment, la vitesse chacun des mobiles sera regardée comme positive ou nég tive suivant que ce mobile marchera de gauche à droite en sens contraire; les distances x et y, comptées à partir c points A et B, seront positives ou négatives, selon qu'el seront portées vers la droite ou vers la gauche, le temp est lui-même positif ou négatif suivant que la rencontr lieu après ou avant le moment où les deux mobiles pass aux points A et B. De cette manière, et en vertu de la f mule établie dans le numéro précédent, on voit que les éq tions (1) et (2) conviennent à tous les cas de la questior en est de même de l'équation (3), si l'on remarque qu partant du point B on arrive au même point M, soit en courant la distance y, soit en parcourant successivement distances d et x.

106. Pour achever de familiariser les élèves avec l'in prétation des quantités positives ou négatives, nous all faire encore quelques applications de ces formules. Sup sons la distance BA égale à 120 mètres, c'est-à-dire $d = 1$

1° Les mobiles marchent tous deux de gauche à dro le premier avec une vitesse de 6 mètres par seconde,

deuxième avec une vitesse de 10 mètres. On fera $a=+6$, $b=+10$, ce qui donne

$$t=+30,\quad x=180,\quad y=300.$$

Ainsi, la rencontre aura lieu après 30 secondes, à droite, et à 180 mètres du point A. C'est le cas que nous avons examiné d'abord.

2° Les mobiles marchent tous deux de gauche à droite ; le premier avec une vitesse de 6 mètres par seconde, le deuxième avec une vitesse de 4 mètres. On fera $a=+6$, $b=+4$, ce qui donne

$$t=\frac{120}{-2}=-60,\quad x=-360,\quad y=-240.$$

Ainsi la rencontre a eu lieu il y a 60 secondes, à gauche, et à 240 mètres du point B. On voit en effet que le premier courrier allant plus vite que le deuxième a dû le dépasser en un certain point situé à gauche du point B.

3° Le premier mobile marche de droite à gauche avec une vitesse de 3 mètres par seconde, le deuxième marche de gauche à droite avec une vitesse de 5 mètres. On fera $a=-3$, $b=+5$, ce qui donne

$$t=15,\quad x=-45,\quad y=75.$$

Ainsi, la rencontre aura lieu entre les points A et B ; ce qui est évident *à priori*, puisque les deux mobiles marchent à la rencontre l'un de l'autre.

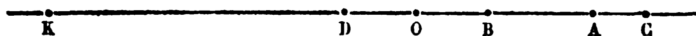
107. Remarque II. Les exemples précédents montrent combien il est utile de représenter par les mêmes lettres des quantités tantôt positives, tantôt négatives, suivant les différents cas de la question que l'on traite. Cette extension donnée à la signification des lettres ne changent rien au mécanisme des opérations algébriques ni aux transformations servant à la résolution des équations. Voici comment on peut se convaincre de cette vérité importante.

parcourt sur une droite successivement plusieurs longueurs données. On demande à quelle distance il se trouve finalement du point de départ.

La question présente plusieurs cas différents, suivant que chacune des longueurs est parcourue dans un sens ou dans l'autre. Lorsque toutes les longueurs sont parcourues dans la même sens à la suite les unes des autres, elles s'ajoutent évidemment ; si donc on appelle a, b, c, d, ces diverses longueurs que, pour préciser, nous supposerons au nombre de quatre, et x la distance à laquelle le mobile se trouve finalement du point de départ, on aura la formule

$$x = a + b + c + d.$$

Grâce à la considération des quantités positives ou négatives, cette formule peut être étendue à tous les autres cas. En effet, soit O le point de départ du mobile sur la droite donnée ; imaginons un point K situé très-loin sur la gauche, à une distance arbitraire très-grande m du point O,



et supposons pour un instant que l'on compte les distances à partir de ce point K. Au moment où le mobile part du point O, il est à la distance m du point K ; il parcourt ensuite des longueurs données dans un sens ou dans l'autre ; il est clair que chaque longueur parcourue de gauche à droite, l'éloignant du point K, devra être ajoutée, et par conséquent regardée comme positive, et que chaque longueur parcourue en sens contraire, c'est-à-dire de droite à gauche, le rapprochant du point K, devra être retranchée, et par conséquent regardée comme négative. Si donc on représente par les lettres a, b, c, d, les longueurs données, affectées chacune du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est parcourue de gauche à droite ou en sens contraire, on

aura la formule générale

$$m+x=m+a+b+c+d,$$

qui s'écrit plus simplement

$$x=a+b+c+d.$$

Lorsque le polynôme aura une valeur positive, la distance x, devant être ajoutée à m, sera comptée à partir du point O vers la droite; lorsque le polynôme aura une valeur négative, la distance x, devant être retranchée de m, sera comptée à partir du point O vers la gauche.

Supposons, par exemple, que le mobile parcoure une première longueur OA de 5 mètres de gauche à droite, une seconde AB de 3 mètres en sens contraire, une troisième BC de 4 mètres de gauche à droite, et enfin une quatrième CD de 8 mètres en sens inverse; affectant chacune d'elles du signe convenable, on fera

$$a=+5, \quad b=-3, \quad c=+4, \quad d=-8.$$

La formule générale indique qu'il faut faire la somme algébrique des quantités représentées par les lettres a, b, c, d; or, on sait que l'addition algébrique consiste à écrire les quantités avec leurs signes; on aura donc, en remplaçant les lettres par leurs valeurs,

$$x=5-3+4-8=-2.$$

Cette valeur -2 signifie qu'il faut de la distance m retrancher 2 mètres; ainsi le point d'arrivée D sera à 2 mètres du point de départ O vers la gauche.

102. PROBLÈME II. *On connaît l'âge d'un père et celui de son fils, et l'on demande à quelle époque l'âge du père sera ou a été triple de l'âge du fils.*

Appelons a l'âge actuel du père, b l'âge du fils, le rapport actuel de l'âge du père à l'âge du fils est $\frac{a}{b}$. On sait

tité négative, étant une quantité à retrancher, donnera un résultat d'autant plus petit que sa valeur absolue sera plus grande. Pour fixer les idées, supposons que la lettre x représente le résultat des opérations d'un négociant dans le courant de la journée (n° 33); admettons que le négociant ait en caisse, au commencement de la journée, une somme d'argent suffisamment grande que nous désignerons par m. La fortune du négociant est devenue $m+x$. Il peut arriver que la somme des dépenses égale celles des recettes, alors la valeur de x est zéro, et la fortune du négociant n'a pas changé. Si la valeur de x est positive, la fortune du négociant augmente d'autant plus que la valeur absolue de x est plus grande. Si la valeur de x est négative, la fortune du négociant diminue d'autant plus que la valeur absolue de x est plus grande. Pour abréger, on fait abstraction de la fortune primitive, et l'on considère une quantité positive comme plus grande que zéro, et d'autant plus grande que sa valeur absolue est plus grande, une quantité négative comme plus petite que zéro, et d'autant plus petite que sa valeur absolue est plus grande. Ainsi, on dit que la quantité -1 est plus petite que 0, la quantité -2 plus petite que -1, la quantité -3 plus petite que -2,... cela signifie, je le répète, que $m-1$ est plus petite que m, $m-2$ plus petite que $m-1$, $m-3$ plus petite que $m-2$,...

Cette comparaison des valeurs relatives n'est pas moins évidente dans l'échelle des températures marquées par le thermomètre; les nombres positifs indiquent des températures supérieures à la température zéro; les nombres négatifs des températures inférieures; les températures -1, -2, -3,... vont en s'abaissant de plus en plus.

Il en est de même de toutes les sortes de grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens opposés. Nous avons déterminé (n° 104) la position d'un mobile M sur une

droite par sa distance à un point fixe O, en affectant du signe + les distances portées vers la droite et du signe — les distances portées en sens contraire, et nous avons appelé x cette distance affectée du signe convenable. Que l'on imagine maintenant un point K très-loin vers la gauche, à une distance m du point O, et que l'on compte les distances à partir de ce point ; la position du mobile sera déterminée par la quantité $m + x$. Si le mobile, partant du point O, se meut vers la droite, la valeur de x est positive et va en augmentant de même que la distance $m + x$ à l'origine fictive K. Si le mobile marche vers la gauche, la valeur de x sera négative et ira en augmentant en valeur absolue ; mais la distance $m + x$ à l'origine fictive K ira en diminuant. Faisant abstraction de la quantité m, on dira que la valeur relative de x augmente dans le premier cas, diminue dans le second.

DES INÉGALITÉS.

109. Les théorèmes que nous avons démontrés sur les égalités et les transformations qui en résultent (n°s 79 à 82) s'appliquent aux inégalités, sauf quelques légères modifications.

1° Une inégalité subsiste si à ses deux membres on ajoute une même quantité, ou si de ses deux membres on retranche une même quantité.

Ce que nous venons de dire sur la comparaison des valeurs relatives des quantités positives ou négatives donne à ce théorème un sens tout à fait général. Soit l'inégalité

$$5 > 3\,;$$

des deux membres retranchons 7, nous aurons

$$-2 > -4.$$

Il en résulte que l'on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre en changeant son signe.

Mais il n'est pas permis de changer les signes de tous les termes d'une inégalité, ou du moins, si on le fait, il faut changer en même temps le sens de l'inégalité. Soit l'inégalité

$$5 > 3;$$

si on change les signes, on écrira

$$-5 < -3.$$

2° On voit aussi que l'inégalité subsiste si on multiplie ou si on divise les deux membres par un même nombre positif.

Si l'on multipliait ou si l'on divisait par un nombre négatif, il faudrait avoir soin de changer le sens de l'inégalité. Car ceci reviendrait à multiplier par un nombre positif et à changer les signes.

Ces diverses transformations permettent de résoudre une inégalité comme nous avons résolu une équation. Supposons, par exemple, que la quantité x soit assujettie à satisfaire à la condition

$$\frac{7x}{8} - \frac{3}{4} > \frac{1}{6} + \frac{5x}{12}.$$

Si l'on multiplie les deux membres par le nombre positif 24 pour faire disparaître les dénominateurs, cette inégalité devient

$$21x - 18 > 4 + 10x.$$

Si maintenant on fait passer les termes inconnus dans le premier membre, les termes connus dans le second, on a

$$11x > 22,$$

et, en divisant par le nombre positif 11,

$$x > 2.$$

Soit encore l'inégalité

$$3x + 84 > 8x - 36.$$

En faisant passer les termes connus dans le premier membre, les termes inconnus dans le second, on a

$$120 > 5x,$$

ou

$$5x < 120,$$

et, en divisant par le nombre positif 5,

$$x < 24.$$

CHAPITRE III.

DES CAS D'IMPOSSIBILITÉ ET D'INDÉTERMINATION.

Des cas d'impossibilité.

110. Une équation du premier degré à une inconnue, par des transformations convenables, peut toujours être mise sous la forme

$$ax = b,$$

les lettres a et b désignant des quantités connues ; d'où l'on déduit

$$x = \frac{a}{b}.$$

Ainsi une équation du premier degré à une inconnue admet en général une solution, positive ou négative, et n'en admet qu'une.

Il en est de même d'un système de n équations du premier degré à n inconnues ; car nous avons vu (n° 94) qu'un pareil système peut être transformé en un système équivalent de n équations renfermant, la première les n inconnues, la deuxième $n - 1$, la troisième $n - 2$....., enfin la dernière une seule inconnue ; cette dernière équation donnera en général pour la dernière inconnue une valeur unique et déterminée, et, en remontant ensuite de proche en proche, on trouvera aussi pour chacune des autres inconnues une valeur unique et déterminée.

111. Il peut arriver que dans l'équation

$$ax = b,$$

à laquelle on est conduit en résolvant un système d'équations, le coefficient a de l'inconnue soit nul ; alors la question revient à trouver un nombre qui, multiplié par zéro, donne un produit égal à b, ce qui est impossible ; car le produit d'une quantité quelconque par *zéro* est toujours égal à zéro. Ainsi, dans ce cas, il y a impossibilité de satisfaire à l'équation ou au système d'équations proposé.

EXEMPLES :

1° Trouver un nombre qui augmenté de son sixième et de 10, et diminué de sa moitié, égale deux fois son tiers augmenté de 8. En désignant par x ce nombre, on a l'équation

$$x + \frac{x}{6} + 10 - \frac{x}{2} = 2\left(\frac{x}{3} + 8\right),$$

qui, simplifiée, devient

$$\frac{2x}{3} + 10 = \frac{2x}{3} + 16,$$

$$0 \times x = 6.$$

L'impossibilité est évidente. Elle se manifeste déjà dans l'équation précédente ; car, si l'on retranche $\frac{2x}{3}$ de part et d'autre, il vient $10 = 16$, ce qui est absurde. Ainsi, il n'existe aucun nombre satisfaisant à la question.

2° Trouver deux nombres tels que le tiers du premier égale la moitié du second moins 1, et que le second égale les deux tiers du premier plus 6. Si l'on appelle x et y ces deux nombres, on a les deux équations

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} - 1,$$

$$y = \frac{2x}{3} + 6.$$

En substituant dans la première la valeur de y donnée par la seconde, on obtient le système équivalent

$$2 = 0,$$
$$y = \frac{2x}{3} + 6.$$

Il n'existe pas de nombres satisfaisant aux conditions énoncées.

2° Résoudre les deux équations

$$3x - 2y = 10,$$
$$6x - 4y = 17.$$

En substituant dans la seconde la valeur de y tirée de la première, on trouve

$$3 = 0.$$

Ainsi il n'existe pas de nombres satisfaisant à la fois aux deux équations proposées.

L'impossibilité se manifeste sur les équations elles-mêmes; en effet, si l'on multiplie tous les termes de la première par 2, on a

$$6x - 4y = 20,$$
$$6x - 4y = 17.$$

On voit que les deux équations sont *incompatibles;* car les premiers membres sont les mêmes et les seconds membres diffèrent.

112. *Du symbole l'infini.* Revenons à l'équation

$$ax = b,$$

et supposons que la valeur du coefficient a soit très-petite; l'inconnue x, donnée par la formule

$$x = \frac{b}{a},$$

sera très-grande en valeur absolue, et, si l'on conçoit que la valeur du coefficient a diminue jusqu'à 0, la valeur de x

augmentera indéfiniment et deviendra plus grande que toute quantité donnée. Par exemple, si l'on donne au coefficient a successivement les valeurs

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10000}, \quad \ldots,$$

le quotient x prendra les valeurs de plus en plus grandes

$$10b, \quad 100b, \quad 1000b, \quad 10000b; \ldots$$

Lorsqu'une quantité augmente ainsi de manière à devenir plus grande que toute quantité donnée, on dit qu'elle devient infinie et on la représente par le signe ∞, qui a la forme d'un huit renversé.

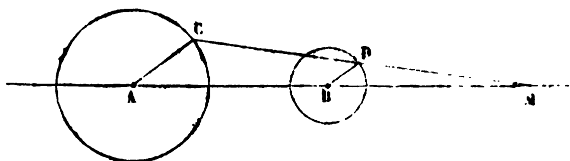
Quand l'une des inconnues d'un problème se présente sous cette forme, il y a évidemment impossibilité; car ce symbole provient de ce que, dans une équation telle que $ax = b$, le coefficient a de l'inconnue est nul.

Reprenons le problème du n° 105, dans le cas où les deux mobiles marchent de gauche à droite, le deuxième allant plus vite que le premier. Si la différence des vitesses $b-a$ est très-petite, les formules donneront pour les inconnues des valeurs positives très-grandes, ce qui indique que la rencontre aura lieu après un temps très-long, et en un point très-éloigné vers la droite. Et en effet, le deuxième mobile, marchant avec une vitesse très-peu supérieure à celle du premier, ne l'atteindra qu'après un temps très-long. Plus la différence des vitesses sera petite, plus le point de rencontre sera éloigné. Enfin, quand les vitesses deviennent égales, le point de rencontre s'éloigne à l'infini; il y a impossibilité de satisfaire aux équations du problème, et en effet, les deux mobiles, marchant également vite, restent toujours à la même distance l'un de l'autre et ne se rencontrent jamais.

Supposons que le deuxième courrier marche un peu moins

vite que le premier, les formules donnent pour les inconnues des valeurs négatives très-grandes en valeur absolue; ce qui indique que la rencontre a eu lieu il y a très-longtemps, en un point situé très-loin vers la gauche. Plus la différence $a - b$ des vitesses est petite, plus ce point de rencontre est éloigné. Enfin, quand cette différence devient nulle, le point s'éloigne à l'infini vers la gauche, et il y a impossibilité.

113. Remarque I. Dans les questions de géométrie, le symbole l'infini indique ordinairement le parallélisme de deux droites. Proposons-nous, par exemple, la question suivante :



Étant donnés deux cercles, on mène deux rayons parallèles AC, BD; *on joint leurs extrémités; déterminer le point* M *où la droite* CD *rencontre la ligne des centres.*

Appelons a et b les rayons des deux cercles, d la distance des centres AB, x la distance inconnue AM. Les triangles semblables MAC, MBD, donnent la proportion

$$\frac{x}{a} = \frac{x-d}{b},$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{ad}{a-b}.$$

Quand la différence $a - b$ des rayons est très-petite, la valeur de x est très-grande, et le point M très-éloigné. Si cette différence diminue jusqu'à zéro, le point M s'éloigne à l'infini, et la droite CD devient parallèle à la droite AB.

On voit en effet que, lorsque les cercles sont égaux, la figure ABDC devient un parallélogramme.

114. Remarque II. Les solutions négatives des équations ne sont pas toujours admissibles dans la résolution des problèmes. Souvent la question est de telle nature que les inconnues doivent nécessairement être positives ; dans ce cas, si l'on trouve pour les inconnues des valeurs négatives, il y a impossibilité. Cette circonstance se présente dans la question suivante :

Avec deux vins qui coûtent a *et* b *le litre, former* d *litres d'un mélange coûtant* c *le litre.*

Il est évident *à priori* que le prix c de chaque litre du mélange doit être intermédiaire entre les prix a et b de chaque litre des deux vins. Appelons x et y les quantités des deux vins qu'il faut mélanger, nous aurons les équations (n° 16),

$$x + y = d,$$
$$ax + by = cd;$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{d(c-b)}{a-b},$$
$$y = \frac{d(a-c)}{a-b}.$$

La nature de la question exige évidemment que les deux inconnues aient des valeurs positives. Nous pouvons toujours supposer a plus grand que b, c'est-à-dire appeler premier vin le plus cher. Dans les deux formules, le dénominateur étant positif, il est nécessaire que chacun des numérateurs soit positif, ce qui aura lieu si les deux conditions

$$c > b, \qquad c < a,$$

sont remplies. Ainsi, pour que la question admette une solution, il faut que le prix du litre du mélange soit intermédiaire entre les prix des deux vins.

Des cas d'indétermination.

115. Nous avons dit que l'équation du premier degré à une inconnue peut toujours se mettre sous la forme

$$ax = b,$$

et nous avons vu que, lorsque le coefficient a de l'inconnue est nul, sans que le second membre le soit, il y a impossibilité. Supposons maintenant que b soit nul en même temps que a, l'équation devient

$$0 \times x = 0;$$

il s'agit de trouver un nombre qui, multiplié par zéro, donne un produit égal à zéro; tous les nombres satisfont évidemment à l'équation, qui se réduit à une identité $0 = 0$, et la valeur de l'inconnue est indéterminée. Dans ce cas, la formule donne pour l'inconnue un symbole de la forme $\frac{0}{0}$.

Exemples :

1° Trouver un nombre qui, augmenté de son sixième et de 10, et diminué de sa moitié, égale deux fois son tiers augmenté de 5. Si l'on appelle x ce nombre, on a l'équation

$$x + \frac{x}{6} + 10 - \frac{x}{2} = 2\left(\frac{x}{3} + 5\right),$$

qui, simplifiée, se réduit à

$$\frac{2x}{3} + 10 = \frac{2x}{} + 10,$$

ou

$$0 \times x = 0.$$

Tous les nombres satisfont à la question. Il y a indétermination.

2° Trouver deux nombres tels que le tiers du premier égale la moitié du second, moins 1, et que le second égale

les deux tiers du premier, plus 2. Si l'on appelle x et y ces deux nombres, on a les deux équations

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} - 1,$$
$$y = \frac{2x}{3} + 2.$$

En substituant dans la première la valeur de y donnée par la seconde, on obtient le système équivalent

$$0 = 0,$$
$$y = \frac{2x}{3} + 2.$$

L'une des équations se réduisant à une identité, on n'a qu'une équation à deux inconnues; on peut donner à l'une des inconnues, à x par exemple, une valeur arbitraire, il en résulte pour y une valeur correspondante; ainsi l'équation admet une infinité de solutions, et il y a encore indétermination.

3° Résoudre les deux équations

$$3x - 2y = 10,$$
$$6x - 4y = 20.$$

Si l'on multiplie la première équation par 2, on voit qu'elle devient exactement la même que la seconde; ainsi les deux équations n'en font qu'une, et il y a indétermination.

4° Dans le problème des deux mobiles (n° 105), si l'on a à la fois $a = b$, $d = 0$, les trois formules deviennent $\frac{0}{0}$, et il y a indétermination; et en effet, les deux mobiles, étant ensemble et marchant avec la même vitesse, ne se quitteront jamais.

5° Dans le problème du mélange (n° 114), si les trois

quantités a, b, c, sont égales, les deux inconnues se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, et les deux équations du problème n'en font qu'une : il y a indétermination. Et en effet, les prix des deux vins étant les mêmes, on obtiendra toujours un mélange de ce même prix, quelle que soit la proportion suivant laquelle on mélange les deux vins.

116. REMARQUE. Le symbole $\frac{0}{0}$ n'indique pas toujours l'indétermination. Il peut arriver qu'une fraction se présente sous cette forme, parce qu'il y a au numérateur et au dénominateur un même facteur algébrique qui devient nul pour certaines valeurs données aux lettres; on supprimera ce facteur commun, afin d'obtenir la valeur de la fraction.

EXEMPLES. 1° La fraction $\frac{2x-2}{3x-3}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, quand on fait $x=1$. Mais cette fraction peut s'écrire $\frac{2(x-1)}{3(x-1)}$, et si l'on supprime le facteur commun $x-1$, on voit qu'elle est constamment égale à $\frac{2}{3}$.

2° La fraction $\frac{2x^2-2x}{3x-3}$ devient aussi $\frac{0}{0}$, quand on y fait $x=1$. Cette fraction peut s'écrire $\frac{2x(x-1)}{3(x-1)}$, ou $\frac{2x}{3}$, en supprimant le facteur commun $x-1$; la valeur de cette fraction varie quand on donne à x différentes valeurs; pour $x=1$, elle est égale à $\frac{2}{3}$.

3° La fraction $\frac{2(x-1)^2}{3(x-1)}$ prend aussi la forme $\frac{0}{0}$ pour $x=1$.

Mais si l'on supprime le facteur commun $x - 1$, elle se réduit à $\frac{2(x-1)}{3}$, et devient nulle pour $x = 1$.

4° La fraction $\frac{2(x-1)}{3(x-1)^2}$ prend aussi la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = 1$. Si l'on supprime le facteur commun $x - 1$, elle se réduit à $\frac{2}{3(x-1)}$, et devient infinie pour $x = 1$.

CHAPITRE IV.

FORMULES GÉNÉRALES POUR LA RÉSOLUTION DE DEUX ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES.

---

117. Deux équations du premier degré à deux inconnues peuvent toujours être mises sous la forme

$$(1)\qquad ax+by=c,$$
$$(2)\qquad a'x+b'y=c',$$

les lettre a, b, c, a', b', c', désignant des quantités connues, positives ou négatives.

Si de la première équation on tire la valeur de x,

$$(3)\qquad x=\frac{c-by}{a},$$

et qu'on la substitue dans la seconde, on obtient l'équation

$$\frac{a'(c-by)}{a}+b'y=c',$$

qui se réduit à

$$(4)\qquad (ab'-ba')y=ac'-ca',$$

et d'où l'on déduit

$$(5)\qquad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

En portant cette valeur dans celle de x, et simplifiant, on trouve

$$(6)\qquad x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}.$$

Telles sont les formules générales au moyen desquelles on peut résoudre immédiatement un système quelconque

de deux équations du premier degré à deux inconnues. Soient, par exemple, les deux équations

$$5x - 3y = 9,$$
$$7x + 11y = 43;$$

on fera $a = 5$, $b = -3$, $a' = 7$, $b' = 11$, $c = 9$, $c' = 43$, et les formules donneront

$$x = 3, \qquad y = 2,$$

118. Remarque I. Il est facile de se rappeler la composition des formules

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$
$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

que nous venons de trouver.

Le dénominateur est le même. Les deux lettres a et b, coefficients des inconnues, peuvent être disposées suivant les deux ordres ab ou ba; séparons ces deux expressions par le signe —, et accentuons la seconde lettre dans chacune d'elles, nous formerons le dénominateur

$$ab' - ba'.$$

Si, dans ce dénominateur, nous remplaçons les deux coefficients a et a' de l'inconnue x par les seconds membres c et c' des deux équations, nous formerons le premier numérateur $cb' - bc'$. Si, dans le dénominateur, nous remplaçons de même les coefficients b et b' de l'inconnue y par les seconds membres c et c', nous formerons le second numérateur $ac' - ca'$.

En général, on obtient le numérateur d'une inconnue quelconque en remplaçant dans le dénominateur les coefficients de cette inconnue par les seconds membres correspondants.

119. Remarque II. Les deux formules ont entre elles

une analogie qu'il est bon de remarquer et qui permet de déduire l'une de l'autre. A l'inspection des deux équations proposées, nous voyons que la lettre a se rapporte à x, de même que b à y. Si, dans ces équations, on permute les lettres x et y, a et b (c'est-à-dire si l'on remplace x par y et y par x, a par b et b par a), les deux équations deviennent

$$by + ax = c,$$
$$b'y + a'x = c',$$

et ne changent pas. Concevons que l'on répète sur ces dernières les calculs faits précédemment, il suffira évidemment d'effectuer la même permutation dans les résultats. Ainsi, au lieu d'arriver à la valeur de y, on arrivera à celle de x; donc, si dans la formule (5), on effectue la permutation, on aura

$$x = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'},$$

ou, en changeant les signes du numérateur et du dénominateur,

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Cette valeur de x satisfait au nouveau système d'équations, et par conséquent au système proposé qui est le même.

Appliquons encore ces considérations de symétrie aux deux équations

$$x + y = d,$$
$$ax + by = cd,$$

auxquelles on est conduit en résolvant le problème du n° 114. Si, de la seconde, on retranche la première, multipliée par b, on trouve

$$(a - b)x = d(c - b),$$

d'où

$$x = \frac{d(c - b)}{a - b}.$$

On voit que les équations ne changent pas quand on y permute les lettres x et y, a et b; en effectuant la permutation dans la valeur de x, on aura donc immédiatement

$$y=\frac{d(c-a)}{b-a}=\frac{d(a-c)}{a-b}.$$

Soient encore les deux équations

$$ax+by=c,$$
$$bx+a'y=c.$$

En appliquant les deux formules générales, on trouve

$$x=\frac{c(a'-b)}{aa'-b^2},\qquad y=\frac{c(a-b)}{aa'-b^2}.$$

Il y a encore ici une certaine symétrie. Car, si l'on permute x et y, a et a', les équations deviennent

$$a'y+bx=c,$$
$$by+ax=c,$$

la première est devenue la seconde, la seconde la première, mais le système n'a pas changé. Si donc on effectue dans la valeur de x la même permutation, on trouvera y.

Discussion.

120. On appelle discussion en algèbre l'examen des différents cas que peut présenter une question. Nous avons résolu les deux équations générales du second degré

(1) $$ax+by=c,$$
(2) $$a'x+b'y=c';$$

nous allons examiner maintenant les principales circonstances qui se rencontrent dans les valeurs des inconnues.

Si les quatre coefficients a, a', b, b', des inconnues sont nuls en même temps, et si les deux seconds membres c et c' ne sont pas nuls, il y a évidemment impossibilité. Mais si les deux seconds membres sont aussi nuls, les deux équa-

tions se réduisent à deux identités et il y a indétermination complète; car il est clair que l'on peut donner aux inconnues des valeurs arbitraires et indépendantes l'une de l'autre.

Ce cas très-exceptionnel étant écarté, supposons que l'un au moins des coefficients, a par exemple, ne soit pas nul. On peut tirer de la première équation la valeur de x comme nous l'avons fait; car il est permis de diviser par le nombre a, qui n'est ni nul ni infini; en substituant dans la seconde, et en multipliant par le nombre a, ce qui est également permis, on remplace le système proposé par le système équivalent des équations (3) et (4),

$$x = \frac{c - by}{a}, \tag{3}$$

$$(ab' - ba')y = ac' - ca'. \tag{4}$$

La discussion est ramenée ainsi à celle de l'équation (4) qui ne contient qu'une inconnue.

1° En général le coefficient $ab' - ba'$ n'est pas nul; dans ce cas, l'équation (4) donne pour y une valeur finie et déterminée; en la portant dans l'équation (3), on trouvera aussi pour x une valeur finie et déterminée. Ainsi *lorsque le dénominateur* $ab' - ba'$ *n'est pas nul, le système des deux équations proposées admet une solution et une seule.*

2° Si la quantité $ab' - ba'$ est nulle sans que la quantité $ac' - ca'$ le soit, l'équation (4) est impossible, et par conséquent les équations proposées sont incompatibles. Dans ce cas, la valeur de y se présente sous la forme ∞.

Ceci aurait lieu de la même manière, si, le dénominateur $ab' - ba'$ étant nul, l'autre numérateur $cb' - bc'$ ne l'était pas; car, alors, l'un des deux coefficiens b et b' au moins ne serait pas nul; on pourrait tirer de l'une des deux équations proposées la valeur de y et la substituer dans l'autre, ce qui conduirait à l'équation impossible

$$(ab' - ba')x = cb' - bc'.$$

Ainsi ***quand le dénominateur*** ab' — ba' ***est nul, et que l'un des numérateurs ne l'est pas, il y a impossibilité.***

3° Si les deux quantités $ab' - ba'$ et $ac' - ca'$ sont nulles en même temps, a n'étant pas nulle, l'équation (4) devient une identité, et les deux équations proposées se réduisent à une seule, l'équation (3). Il y a indétermination ; on peut donner à y des valeurs arbitraires ; il en résulte pour x des valeurs correspondantes.

Ceci arrivera toutes les fois que les deux numérateurs seront nuls en même temps que le dénominateur, l'un au moins des quatre coefficients des inconnues étant différent de zéro ; car on pourra toujours effectuer la résolution en divisant et multipliant par ce coefficient différent de zéro, ce qui conduira à deux équations de la forme (3) et (4), dont une se réduira à une identité.

Ainsi quand, l'un au moins des quatre coefficients des inconnues étant différent de zéro, ***les deux numérateurs sont nuls en même temps que le dénominateur, il y a indétermination, et les deux équations n'en font qu'une.***

Tels sont les trois cas principaux qui se présentent dans la résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues.

121. En général, quand l'un des numérateurs est nul en même temps que le dénominateur, l'autre est aussi nul. En effet, si de l'égalité $ab' - ba' = 0$, on tire $b' = \frac{ba'}{a}$ et que l'on substitue dans l'expression $cb' - bc'$, on a

$$cb' - bc' = \frac{cba'}{a} - bc' = \frac{b}{a}(ca' - ac'),$$

ou

$$a(cb' - bc') = -b(ac' - ca').$$

Lorsque le second numérateur sera nul, le premier le sera aussi, à moins que le coefficient a ne soit nul.

Remarquons que, dans le cas très-exceptionnel où les quatre coefficients des inconnues sont nuls, sans que les seconds membres le soient, les valeurs données par les formules se présentent toutes deux sous la forme $\frac{0}{0}$, et cependant il n'y a pas indétermination, il y a au contraire impossibilité.

EXERCICES.

Questions résolues.

QUESTION I. *On connaît les poids spécifiques de deux métaux et l'on demande dans quelle proportion il faut les mélanger pour obtenir un alliage ayant un poids spécifique donné.*

On sait que le poids spécifique d'un corps est le rapport du poids d'un volume quelconque de ce corps au poids d'un égal volume d'eau. En d'autres termes, si l'on prend pour unité de volume le décimètre cube, et pour unité de poids le kilogramme, comme on fait ordinairement dans les arts, on peut dire que le poids spécifique d'un corps est le poids en kilogrammes d'un décimètre cube de ce corps. D'un autre côté on exprime la composition d'un alliage, en disant quel poids de chaque métal entre dans un kilogramme d'alliage.

Représentons par a et b les poids spécifiques des deux métaux, par c celui de l'alliage; et désignons par x et y les poids de ces deux métaux qui entrent dans un kilogramme d'alliage. On aura d'abord l'équation

$$x + y = 1.$$

Cherchons maintenant le poids spécifique de l'alliage,

comme si la composition en était connue, et exprimons qu'il est bien égal à c, nous aurons la seconde équation du problème. Le poids d'un corps est égal à son volume multiplié par le poids spécifique, et réciproquement le volume d'un corps est égal à son poids divisé par le poids spécifique. Dans un kilogramme d'alliage il entre des poids x et y des deux métaux, les volumes occupés par ces deux poids sont exprimés par $\frac{x}{a}$ et $\frac{x}{b}$; et le volume d'un kilogramme d'alliage est égal à leur somme $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, en supposant toutefois que dans l'alliage des deux métaux, il n'y ait ni contraction ni dilatation. Le poids spécifique de l'alliage, étant égal à son poids divisé par son volume, sera

$$\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{x}{b}}.$$

Mais ce poids spécifique doit être égal à c; on a donc l'équation

$$\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{x}{b}}=c.$$

Si l'on multiplie par le dénominateur $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, cette équation devient

$$c\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1,$$

ou

$$\frac{cx}{a}+\frac{cy}{b}=1,$$

$$bcx+acy=ab.$$

Ainsi les deux équations du problème sont

$$x+y=1,$$
$$bcx+acy=ab.$$

On en déduit

$$x=\frac{a(c-b)}{c(a-b)},\qquad y=\frac{b(a-c)}{c(a-b)}.$$

La nature de la question exige que les deux inconnues aient des valeurs positives. Soit $a>b$, il faudra, pour que le problème soit possible, que l'on ait $c>b$ et $c<a$, c'est-à-dire que le poids spécifique de l'alliage soit intermédiaire entre les poids spécifiques des deux métaux, ce qui est évident *à priori*.

Le problème de la couronne de Hiéron (n° 18) est une application des formules précédentes. Le poids spécifique de l'or est 19,26, celui de l'argent 10,47. La couronne perd dans l'eau 467 grammes, c'est le poids d'un égal volume d'eau ; donc le poids spécifique de la couronne égale $\frac{7463}{467}=15,98$. On fera

$$a=19,26,\qquad b=10,47,\qquad c=15,98.$$

QUESTION II. Résoudre le système des trois équations

$$(1)\qquad x+y+z=1,$$
$$(2)\qquad ax+by+cz=k,$$
$$(3)\qquad a^2x+b^2y+c^2z=k^2.$$

Si de la seconde on retranche la première multipliée par c, on a

$$(4)\qquad (a-c)x+(b-c)y=k-c.$$

Si de la troisième on retranche la seconde multipliée par c, on a de même

$$(5)\qquad a(a-c)x+b(b-c)y=k(k-c).$$

Retranchons de l'équation (5) l'équation (4) multipliée par b, il vient

$$(a-b)(a-c)x=(k-b)(k-c);$$
$$x=\frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

Une fois qu'on a trouvé la valeur de l'une des inconnues, il est facile d'en déduire les autres par des considérations de symétrie. On remarque, en effet, que les équations proposées ne changent pas lorsqu'on permute les deux lettres x et y, a et b. Si donc on effectue cette permutation dans la formule précédente, on obtiendra la valeur de y,

$$y = \frac{(k-a)(k-c)}{(b-a)(b-c)}.$$

De même, les équations ne changent pas lorsqu'on permute les deux lettres y et z, b et c. Si donc, dans la valeur de y, on effectue cette permutation, on aura la valeur de z

$$z = \frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

QUESTION III. Résoudre le système des quatre équations

$$\begin{aligned} x+y+z+u &= 1, \\ ax+by+cz+du &= k, \\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2u &= k^2, \\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3u &= k^3. \end{aligned}$$

Si de chacune de ces équations, on retranche la précédente multipliée par d, on obtient les trois équations

$$\begin{aligned} (a-d)x+(b-d)y+(c-d)z &= k-d, \\ a(a-d)x+b(b-d)y+c(c-d)z &= k(k-d), \\ a^2(a-d)x+b^2(b-d)y+c^2(c-d)z &= k^2(k-d). \end{aligned}$$

Opérant de la même manière sur ces trois équations, retranchons de chacune d'elles la précédente multipliée par c, nous obtiendrons les deux équations

$$\begin{aligned} (a-c)(a-d)x+(b-c)(b-d)y &= (k-c)(k-d), \\ a(a-c)(a-d)x+b(b-c)(b-d)y &= k(k-c)(k-d). \end{aligned}$$

Si enfin de la dernière nous retranchons la précédente multipliée par b, nous aurons

$$(a-b)(a-c)(a-d)x = (k-b)(k-c)(k-d),$$

d'où

$$x = \frac{(k-b)(k-c)(k-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)},$$

En permutant les lettres a et b, puis les lettres b et c, puis c et d, on en déduit la valeur des autres inconnues

$$y = \frac{(k-a)(k-c)(k-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)},$$

$$z = \frac{(k-a)(k-b)(k-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)},$$

$$u = \frac{(k-a)(k-b)(k-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)},$$

Question IV. Résoudre le système des trois équations

$$\frac{b}{z} + \frac{c}{y} = a,$$

$$\frac{c}{x} + \frac{a}{z} = b,$$

$$\frac{a}{y} + \frac{b}{x} = c.$$

On considérera dans ces trois équations les quantités $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ comme étant les inconnues. En multipliant la première équation par a, la seconde par b, la troisième par c, ajoutant les deux dernières en retranchant la première, on trouve

$$\frac{2bc}{x} = b^2 + c^2 - a^2;$$

d'où

$$\frac{1}{x} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Si l'on permute les lettres x et y, a et b, on remarque que la première équation devient la seconde, la seconde la première, et que la troisième reste la même; donc le système des trois équations ne change pas. Il en résulte que si, dans

la valeur de x, on effectue cette permutation, on aura la valeur de y

$$\frac{1}{y} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

De même, si l'on permute les lettres y et z, b et c, la deuxième équation devient la troisième, la troisième la seconde, et la première reste la même ; le système ne change pas. De la valeur de y, on déduira donc celle de z par la permutation indiquée, ce qui donne

$$\frac{1}{z} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

CHAPITRE V*.

FORMULES GÉNÉRALES POUR LA RÉSOLUTION DE TROIS ÉQUATI(DU PREMIER DEGRÉ A TROIS INCONNUES.

---

122. Trois équations du premier degré à trois inconn peuvent toujours être mises sous la forme

$$(1)\qquad ax + by + cz = d,$$
$$(2)\qquad a'x + b'y + c'z = d',$$
$$(3)\qquad a''x + b''y + c''z = d''.$$

Nous résoudrons ces trois équations par une méth plus rapide et plus élégante que la méthode de substituti Multiplions les deux premières équations par deux quant indéterminées m et n; ajoutons ces deux équations et tranchons la troisième, nous aurons

$$(4)\qquad (am + a'n - a'')x + (bm + b'n - b'')y + (cm + c'n - c'')z = dm + d'n - d''.$$

Les deux multiplicateurs m et n étant arbitraires, peut en disposer de manière à annuler deux coefficie de l'équation (4), par exemple les coefficients de y et d(Posons donc

$$(5)\qquad bm + b'n = b'',$$
$$(6)\qquad cm + c'n = c'',$$

l'équation (4) devient

$$(am + a'n - a'')x = dm + d'n - d'';$$

d'où

$$(7)\qquad x = \frac{dm + d'n - d''}{am + a'n - a''}.$$

Des deux équations (5) et (6), résolues au moyen des formules générales, on déduit

$$m=\frac{c'b''-b'c''}{bc'-cb'},\quad n=\frac{bc''-cb''}{bc'-cb'};$$

en substituant ces valeurs dans la formule (7), et multipliant le numérateur et le dénominateur par $bc'-cb'$, on a

$$x=\frac{d(c'b''-b'c'')+d'(bc''-cb'')-d''(bc'-cb')}{a(c'b''-b'c'')+a'(bc''-cb'')-a''(bc'-cb')}.$$

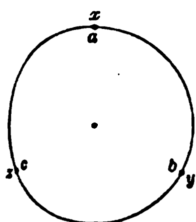
Changeons les signes du numérateur et du dénominateur, la valeur de x s'écrit

$$x=\frac{d(b'c''-c'b'')+d'(cb''-bc'')+d''(bc'-cb')}{a(b'c''-c'b'')+a'(cb''-bc'')+a''(bc'-cb')}.$$

et, en développant les calculs,

$$(8)\qquad x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

123. Remarque I. On pourrait calculer de la même manière les valeurs de y et de z. Mais il est plus simple de les déduire de celle de x par des considérations de symétrie. Sur un cercle, et aux sommets d'un triangle équilatéral inscrit, plaçons les trois lettres x, y, z, ainsi que les trois lettres a, b, c; imaginons ensuite que le cercle tourne autour de son centre dans un sens convenable d'un tiers de circonférence, la lettre y prendra la place de x, z celle de y, x celle de z; de même les lettres b, c, a, prendront la place des lettres a, b, c. Ce changement dans l'ordre des lettres s'appelle une *permutation circulaire*.



Si l'on opère une semblable permutation sur les équations proposées, elles deviennent

$$by + cz + ax = d,$$
$$b'y + c'z + a'x = d',$$
$$b''y + c''z + a''x = d'',$$

et ne changent pas; les valeurs des inconnues restent donc les mêmes. Or, si l'on effectue la permutation circulaire sur la valeur de x trouvée précédemment, on obtient

$$(9) \quad y = \frac{dc'a'' - db'c'' + ad'c'' - cd'a'' + ca'd'' - ac'd''}{bc'a'' - ba'c'' + ab'c'' - cb'a'' + ca'b'' - ac'b''}.$$

Cette valeur de y satisfait au second système d'équations et par conséquent au système proposé.

Si l'on effectue sur le second système d'équations une nouvelle permutation circulaire, le système ne change pas, et la valeur de y devient

$$(10) \quad z = \frac{da'b'' - db'a'' + bd'a'' - ad'b'' + ab'd'' - ba'd''}{ca'b'' - cb'a'' + bc'a'' - ac'b'' + ab'c'' - ba'c''}.$$

En permutant une troisième fois, on retrouverait la valeur de x et ainsi de suite.

124. Remarque II. A l'inspection des formules (8), (9) et (10), on reconnaît que le dénominateur est le même; l'ordre des termes seulement a été changé. On voit aussi que le numérateur de x se déduit du dénominateur, en y remplaçant les coefficients a, a', a'' de l'inconnue x par les seconds membres d, d', d''. Les numérateurs de y et z s'obtiennent de la même manière. Il suffit donc de savoir trouver le dénominateur.

Nous avons formé le dénominateur pour deux inconnues, en écrivant les deux permutations

$$ab, \qquad -ba$$

des deux lettres a et b, et affectant la seconde du signe —. Dans chacune de ces permutations, mettons la troisième lettre c à toutes les places, à la fin, au milieu et au com-

mencement, et alternons les signes, nous obtiendrons les deux groupes

$$abc - acb + cab,$$
$$-bac + bca - cba.$$

Le premier terme de chaque groupe a le signe du terme qui l'a fourni.

Écrivons ces deux groupes l'un à la suite de l'autre, et dans chaque terme affectons la seconde lettre d'un accent, la troisième de deux accents, nous aurons aussi le dénominateur commun

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

Discussion.

125. Le système de trois équations à trois inconnues présente les mêmes cas principaux que le système de deux équations à deux inconnues. Reprenons les trois équations

$$(1) \qquad ax + by + cz = d,$$
$$(2) \qquad a'x + b'y + c'z = d',$$
$$(3) \qquad a''x + b''y + c''z = d''.$$

Écartons le cas très-exceptionnel où les neuf coefficients des inconnues seraient nuls à la fois, ce qui donnerait l'impossibilité ou l'indétermination absolue, et supposons que l'un de ces coefficients au moins, par exemple a, soit différent de zéro. Nous pourrons résoudre la première équation par rapport à x et substituer dans les deux autres; nous transformons le système proposé en un système équivalent

$$(4) \qquad x = \frac{d - by - cz}{a},$$
$$(5) \qquad (ab' - ba')y + (ac' - ca')z = ad' - da',$$
$$(6) \qquad (ab'' - ba'')y + (ac'' - ca'')z = ad'' - da''.$$

Si les quatre coefficients des équations (5) et (6) étaient nuls à la fois, il y aurait impossibilité, ou indétermination, c'est-à-dire réduction à une seule équation. Ce cas excep-

tionnel écarté, nous supposerons que l'un de ces quatre coefficients, par exemple $ab' - ba'$, est différent de zéro. Alors nous pouvons résoudre l'équation (5) par rapport à y et substituer dans l'équation (6). Nous transformons ainsi le second système en un système équivalent

$$(4) \qquad x = \frac{d - by - cz}{a},$$

$$(7) \qquad y = \frac{(ad' - da') - (ac' - ca')z}{ab' - ba'},$$

$$(8) \qquad Dz = A.$$

Nous représentons par D le dénominateur des formules, et par A le numérateur de z. La discussion est ramenée encore à celle d'une équation à une inconnue.

1° En général le dénominateur D n'est pas nul ; dans ce cas, l'équation (8) donne pour z une valeur finie et déterminée, et l'on déduira des équations (7) et (4) pour y et x des valeurs finies et déterminées. Ainsi, *quand le dénominateur* D *n'est pas nul, le système des trois équations proposées admet une solution et n'en admet qu'une.*

2° Si le dénominateur D est nul sans que le numérateur A le soit, il y a impossibilité. Et ceci aura lieu de la même manière toutes les fois que, D étant nul, l'un des trois numérateurs au moins est différent de zéro.

3° Si le numérateur A est nul en même temps que D, il y a indétermination. L'équation (8) devient une identité et les trois équations se réduisent à deux.

EXERCICES SUR LE LIVRE II.

QUESTION I. Résoudre le système des trois équations

$$2x + 4y - 3z = 22,$$
$$4x - 2y + 5z = 18,$$
$$6x + 7y - z = 63.$$

Réponse : $x = 3, \quad y = 7, \quad z = 4.$

QUESTION II. Résoudre les trois équations

$$x+\frac{y}{2}=1,$$

$$y+\frac{z}{3}=1,$$

$$z+\frac{x}{4}=1.$$

Réponse : $x=\frac{16}{25}$, $y=\frac{18}{25}$, $z=\frac{21}{25}$.

QUESTION III. Résoudre les trois équations

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=41,$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=31,$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=25.$$

Réponse : $x=12$, $y=60$, $z=60$.

QUESTION IV. Résoudre les quatre équations

$$4x-3y+2u=9,$$
$$2x+6z=28,$$
$$4u-2y=14,$$
$$3x+4u=26.$$

Réponse : $x=2$, $y=3$, $z=4$, $u=5$.

QUESTION V. Résoudre les trois équations

$$x+a(y+z)=\alpha,$$
$$y+b(z+x)=\beta,$$
$$z+c(x+y)=\gamma.$$

Réponse : $x=\frac{(1-bc)\alpha+a(c-1)\beta+a(b-1)\gamma}{1-bc-ca-ab+2abc}$.

. . . .

. . . .

Question VI. Résoudre les trois équations

$$x + ay + a^2z + a^3 = 0,$$
$$x + by + b^2z + b^3 = 0,$$
$$x + cy + c^2z + c^3 = 0.$$

Réponse :

$$z = -(a + b + c),$$
$$y = bc + ca + ab,$$
$$x = -abc.$$

Question VII. Résoudre les quatre équations

$$x + ay + a^2z + a^3u + a^4 = 0,$$
$$x + by + b^2z + b^3u + b^4 = 0,$$
$$x + cy + c^2z + c^3u + c^4 = 0,$$
$$x + dy + d^2z + d^3u + d^4 = 0.$$

Réponse :

$$u = -(a + b + c + d),$$
$$z = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$
$$y = -(abc + bcd + cda + dab),$$
$$x = abcd.$$

Question VIII. En alliant deux lingots d'argent dans des rapports donnés, on a formé deux nouveaux lingots dont les titres sont connus. Quels sont les titres des deux premiers lingots?

En appelant a et $1 - a$ les poids des deux lingots qui entrent dans un kilogramme du premier alliage, a' et $1 - a'$ les poids des deux lingots qui entrent dans un kilogramme du second alliage, b et b' les titres des deux alliages, x et y les titres des deux lingots, on a les équations

$$ax + (1 - a)y = b,$$
$$a'x + (1 - a')y = b';$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{(1 - a')b - (1 - a)b'}{a - a'},$$
$$x = \frac{ab' - ba'}{a - a'}.$$

QUESTION IX. Connaissant la composition et les prix de trois mélanges formés de trois substances différentes, trouver les prix de ces trois substances.

QUESTION X. Trois joueurs conviennent que le perdant doublera l'argent des deux autres. Ils perdent chacun une partie, et à la fin ils ont chacun la même somme a. Combien chacun avait-il au commencement ?

Réponse : $\frac{13a}{8}$, $\frac{7a}{8}$, $\frac{4a}{8}$.

QUESTION XI. Même question étendue à un nombre quelconque n de joueurs.

Réponse :

$$\frac{(1+n2^{n-1})a}{2^n}, \quad \frac{(1+n2^{n-2})a}{2^n}, \quad \frac{(1+n2^{n-3})a}{2^n}, \quad \ldots\ldots \ldots\ldots \quad \frac{(1+n)a}{2^n}.$$

QUESTION XII. On partage une certaine somme entre plusieurs personnes de la manière suivante : la première prend une somme a et la n^e partie de ce qui reste ; la deuxième une somme $2a$ et la n^e partie de ce qui reste ; la troisième une somme $3a$ et la n^e partie de ce qui reste, et ainsi de suite. Il se trouve à la fin que la somme d'argent a été partagée exactement et que toutes les parts sont égales. On demande quel est le nombre des personnes et la part de chacune.

Réponse : Le nombre des personnes est $n-1$; la part de chacun $a(n-1)$, et la somme totale $a(n-1)^2$.

QUESTION XIII. Un tonneau contient a litres de vin. On tire un litre que l'on remplace par un litre d'eau ; on tire un second litre que l'on remplace par un litre d'eau, et ainsi

de suite. Quelle quantité de vin contiendra encore le tonneau après n opérations de ce genre ?

Réponse : $$\frac{(a-1)^n}{a^{n-1}}.$$

QUESTION XIV. Deux vases de capacités données contiennent chacun un mélange connu d'eau et de vin. Quelle capacité doivent avoir deux vases égaux, pour que, les remplissant à la fois, l'un dans l'un des vases donnés, l'autre dans l'autre, et versant dans chacun d'eux ce qui a été pris dans l'autre, la proportion du mélange devienne la même dans les deux vases ?

QUESTION XV. Inscrire dans un triangle donné un rectangle semblable à un rectangle donné.

QUESTION XVI. Dans un triangle donné inscrire un rectangle de périmètre donné.

LIVRE III.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER.

CARRÉ ET RACINE CARRÉE.

Je rappelle d'abord quelques principes qui ont déjà été vus en arithmétique et qui nous seront utiles par la suite.

126. THÉORÈME I. *Le carré d'un binôme égale le carré du premier terme, plus deux fois le produit du premier par le second, plus le carré du second.*

Si l'on multiplie le binôme $a+b$ par lui-même, on trouve en effet

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ainsi le carré du binôme $x-3$ est

$$x^2 - 6x + 9.$$

Le carré du binôme $x + \frac{p}{2}$ est

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

127. THÉORÈME II. *On élève au carré le produit de plusieurs facteurs en élevant chaque facteur séparément au carré.*

Si l'on multiplie le produit *abc* par lui-même, d'après la règle de la multiplication des monômes, on trouve en effet

$$(abc)^2 = a^2b^2c^2.$$

Corollaire. *On élève au carré un monôme entier, en élevant le coefficient au carré et doublant tous les exposants.* Soit, par exemple, le monôme $7a^3b^2c$; en le multipliant par lui-même, on a

$$(7a^3b^2c)^2 = 49a^6b^4c^2.$$

128. Théorème III. Réciproquement *on extrait la racine carrée d'un produit de plusieurs facteurs en extrayant la racine carrée de chaque facteur séparément.*

Soit le produit *abc*. Je dis que

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}.$$

En effet, si l'on élève le second membre au carré, ce qui se fait en élevant chaque facteur séparément au carré, on reproduit la quantité *abc*.

129. Corollaire I. *On extrait la racine carrée d'un monôme entier en extrayant la racine carrée du coefficient et divisant par deux tous les exposants.* Je dis, par exemple, que

$$\sqrt{49a^6b^4c^2} = 7a^3b^2c.$$

Car, si l'on élève le second membre au carré, on reproduit $49a^6b^4c^2$.

Pour qu'un monôme entier soit carré parfait, c'est-à-dire pour qu'il existe un monôme entier, qui, élevé au carré, reproduise le monôme proposé, il est nécessaire que son coefficient soit un nombre carré parfait et que tous ses exposants soient pairs.

130. Corollaire II. *On fait sortir du signe radical un facteur carré parfait, en en prenant la racine carrée.* Soit l'expression

$$\sqrt{a^2b}.$$

En extrayant la racine de chaque facteur séparément, on écrira

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}.$$

Ceci permet de simplifier les expressions irrationnelles, Soit l'expression irrationnelle

$$\sqrt{12a^7b^4c^3}.$$

On remarque que la quantité placée sous le signe radical peut être décomposée en deux facteurs

$$12a^7b^4c^3 = 4a^6b^4c^2 \times 3ac,$$

dont le premier est carré parfait. Si l'on extrait la racine de chacun des deux facteurs séparément, on a

$$\sqrt{12a^7b^4c^3} = 2a^3b^2c\sqrt{3ac}.$$

Réciproquement *on introduit un facteur sous le signe radical en l'élevant au carré.* Ainsi

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}.$$

131. Théorème IV. *On élève une fraction au carré, en élevant séparément au carré le numérateur et le dénominateur.*

Car, si l'on multiplie la fraction $\frac{a}{b}$ par elle-même, on a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

132. Théorème V. Réciproquement, *on extrait la racine carrée d'une fraction en extrayant séparément la racine du numérateur et du dénominateur.* Ainsi

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Car, si l'on élève le second membre au carré, on reproduit la fraction $\frac{a}{b}$.

Transformation des expressions irrationnelles.

133. On simplifie le calcul des expressions irrationnelles en transformant ces expressions de manière à rendre le dénominateur rationnel. Voici quelques exemples de semblables transformations fréquemment usitées en algèbre.

1° $$\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

On a multiplié par $\sqrt{5}$ les deux termes de la fraction.

2° Soit l'expression

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, le dénominateur, étant le produit de la somme de deux quantités par leur différence, égale la différence $a-b$ de leurs carrés, et devient rationnel. On a donc

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}.$$

On a de même

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b},$$

en multipliant le numérateur et le dénominateur par la somme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Exemples :

$$\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{7}(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{35}+3\sqrt{14}.$$

On a multiplié le numérateur et le dénominateur par la somme $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$, ce qui rend le dénominateur égal à

la différence des carrés, $4\times5-9\times2=20-18=2$. On a supprimé le facteur 2 commun au numérateur et au dénominateur, puis on a multiplié $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$ par $\sqrt{7}$, ce qui donne $2\sqrt{35}+3\sqrt{14}$; car $\sqrt{5}\times\sqrt{7}=\sqrt{5\times7}=\sqrt{35}$, et de même $\sqrt{2}\times\sqrt{7}=\sqrt{2\times7}=\sqrt{14}$.

3° Soit l'expression

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par la différence $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}$, en considérant $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ comme ne formant qu'un seul terme, on a

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a+b-c+2\sqrt{ab}}.$$

Cette dernière expression ne renferme plus qu'un seul terme irrationnel à son dénominateur. On considérera $a+b-c$ comme ne formant qu'un terme et l'on multipliera par la différence $(a+b-c)-2\sqrt{ab}$; l'expression devient ainsi

$$\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab};$$

le dénominateur est rationnel.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Résolution de l'équation $x^2 = A$.

134. Toute équation du second degré à une i
peut être mise sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dans laquelle x désigne l'inconnue, et les lettres a,
quantités connues. Elle contient trois termes, un du
degré ax^2, un du premier degré bx, et un terme

Considérons d'abord le cas où l'équation ne r
pas de terme du premier degré. Soit, par exem
quation

$$x^2 = 25.$$

Il faut trouver une quantité qui, élevée au carré, d
Or le nombre 5, élevé au carré, donne 25; que l'o
ce nombre 5 du signe + ou du signe —, son ca
toujours égal à 25 ; car on sait que le carré d'une
négative est positif. Ainsi l'équation admet les de
tions + 5 et — 5, ce qu'on écrit

$$x = \pm 5,$$

(*lisez* x égale plus ou moins 5). L'équation n'admet
autre solution ; car le nombre 5 est le seul nombre
carré égale 25.

En général soit l'équation

$$x^2 = A,$$

dans laquelle A représente une quantité positive donnée. Désignons par $\sqrt{A}$ le nombre, commensurable ou incommensurable, dont le carré est A ; ce nombre affecté du signe + ou du signe —, aura toujours un carré égal à A ; ainsi l'équation proposée admet deux solutions égales et de signes contraires $+\sqrt{A}$ et $-\sqrt{A}$, ce qu'on écrit

$$x = \pm \sqrt{A}.$$

Ces solutions s'appellent aussi les *racines* de l'équation, parce qu'on les obtient au moyen de l'extraction d'une racine carrée. Mais cette dénomination a été étendue aux solutions des équations de tous les degrés.

Résolution de l'équation $x^2 + px + q = 0$.

135. Considérons maintenant l'équation générale du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Si nous divisons tous les termes par le coefficient a, cette équation devient

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

ou

$$x^2 + px + q = 0,$$

en représentant pour abréger par les lettres p et q les quantités connues $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$.

Afin de mieux faire comprendre la méthode, nous l'expliquerons d'abord sur un exemple. Soit l'équation

$$x^2 - 14x + 40 = 0.$$

Si l'on fait passer dans le second membre le terme connu, cette équation devient

$$x^2 - 14x = -40.$$

Les deux termes $x^2 - 14x$ peuvent être considérés comme les deux premiers termes du carré du binôme $x-7$; et en effet, le carré de ce binôme est $x^2 - 14x + 49$; pour compléter le carré, ajoutons 49 aux deux membres de l'équation, nous aurons

$$x^2 - 14x + 49 = 49 - 40 = 9,$$

ou

$$(x-7)^2 = 9,$$

en remplaçant le premier membre par l'expression équivalente $(x-7)^2$. Cette dernière équation est évidemment équivalente à l'équation proposée.

La quantité $x-7$ doit être telle que son carré égale 9; or le nombre 3, affecté du signe + ou du signe —, a son carré égal à 9, et c'est le seul nombre dont le carré égale 9; on doit donc avoir

$$x - 7 = \pm 3,$$

d'où

$$x = 7 \pm 3.$$

Ainsi l'équation proposée admet les deux solutions

$$x = 7 + 3 = 10,$$
$$x = 7 - 3 = 4.$$

On peut vérifier en effet que chacun des nombres 10 et 4, mis à la place de x, satisfait à l'équation

$$x^2 - 14x + 40 = 0,$$

c'est-à-dire annule le premier membre.

136. La méthode précédente s'applique sans difficulté à l'équation générale

$$x^2 + px + q = 0.$$

Si l'on fait passer le terme connu dans le second membre, cette équation devient

$$x^2 + px = -q.$$

Les deux termes $x^2 + px$ sont les deux premiers termes du

carré du binôme $x+\frac{p}{2}$; et en effet, si l'on forme le carré de ce binôme d'après la loi connue, on a

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

Pour compléter le carré, ajoutons $\frac{p^2}{4}$ aux deux membres de l'équation, l'équation devient

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q,$$

et peut être mise sous la forme

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Nous supposons que la quantité connue $\frac{p^2}{4}-q$ est positive. L'équation étant mise sous cette dernière forme, on voit que la quantité inconnue $x+\frac{p}{2}$ doit être telle que son carré égale la quantité connue $\frac{p^2}{4}-q$; or, si nous désignons par $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ la racine carrée arithmétique du nombre positif $\frac{p^2}{4}-q$, c'est-à-dire le nombre positif, commensurable ou incommensurable, dont le carré égale $\frac{p^2}{4}-q$, la quantité inconnue $x+\frac{p}{2}$ doit être égale au nombre $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, affecté du signe $+$ ou du signe $-$. On aura donc

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

d'où l'on déduit

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Telle est la formule générale dont on se sert pour ré
dre les équations du second degré ; elle donne deux s
tions, l'une fournie par le signe + placé devant le rad
l'autre par le signe —. Il est bon de se la rappeler
cœur; on l'énonce ainsi : *les deux racines d'une équ
du second degré, mise sous la forme*

$$x^2 + px + q = 0,$$

*égalent la moitié du coefficient du terme du premier d
changé de signe, plus ou moins la racine carrée du rés
obtenu en retranchant du carré de cette moitié le t
connu.*

137. Appliquons cette formule à quelques exemple

1° Résoudre l'équation

$$x^2 + 6x + 8 = 0.$$

La formule donne

$$x = -3 \pm \sqrt{9 - 8} = -3 \pm \sqrt{1} = -3 \pm 1.$$

L'équation admet les deux solutions

$$x = -2, \qquad x = -4.$$

2° Résoudre l'équation

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

La formule donne

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

L'équation admet les deux solutions

$$x = 5, \qquad x = 2.$$

3° Résoudre l'équation

$$x^2 + 4x - 12 = 0.$$

La formule donne

$$x = -2 \pm \sqrt{4 + 12} = -2 \pm \sqrt{16} = -2 \pm 4.$$

L'équation admet les deux solutions

$$x = +2, \qquad x = -6.$$

4° Résoudre l'équation

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

La formule donne

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

L'équation admet les deux solutions

$$x = +4, \quad x = -1.$$

Racines égales.

138. Dans ce qui précède, après avoir mis l'équation du second degré sous la forme

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

nous avons supposé que le second membre est une quantité positive, et nous en avons déduit la formule

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

qui nous donne les *deux* racines, ou les deux solutions de l'équation.

Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est nulle, l'équation devient

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0.$$

Le premier membre est un carré parfait. La quantité inconnue $x+\frac{p}{2}$, devant avoir son carré nul, doit être nulle elle-même ; ainsi l'on a

$$x+\frac{p}{2}=0,$$

d'où

$$x=-\frac{p}{2}.$$

L'équation n'admet plus qu'une seule solution $x=-\frac{p}{2}$.

Cependant on a coutume de dire que dans ce cas l'équation admet ***deux racines égales***. En voici la raison : supposons que la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ soit positive et très-petite ; les deux racines, données par la formule générale, différeront très-peu de $-\frac{p}{2}$, l'une en plus, l'autre en moins, et par conséquent différeront très-peu l'une de l'autre. Plus la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ sera petite, plus les deux racines se rapprocheront l'une de l'autre ; et enfin, à la limite, quand la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ sera nulle, les deux racines deviendront égales entre elles.

Racines imaginaires.

139. Les carrés des quantités, soit positives, soit négatives, étant toujours positifs, il s'ensuit que les quantités négatives n'ont pas de racines carrées. Ainsi, lorsqu'en résolvant une équation du second degré, on est amené à extraire la racine carrée d'une quantité négative, il y a évidemment impossibilité de satisfaire à l'équation ; dans ce cas, les formules donnent des valeurs fictives qui ont été

introduites dans l'analyse mathématique sous le nom de quantités *imaginaires*.

Considérons d'abord l'équation

$$x^2 = A.$$

Quand la quantité A est positive, l'équation admet les deux solutions

$$x = \pm \sqrt{A}.$$

Mais quand la quantité A est négative, comme il n'existe aucun nombre, soit positif, soit négatif, dont le carré égale A, il y a impossibilité de satisfaire à l'équation. Cependant la formule donne des valeurs imaginaires qui satisfont également à l'équation, si l'on convient de regarder le symbole $\sqrt{A}$ comme ayant son carré toujours égal à A, quelle que soit la valeur de A, positive ou négative.

Ainsi on dira que l'équation

$$x^2 = -1$$

admet les deux solutions imaginaires

$$x = \pm \sqrt{-1}.$$

On représente ordinairement par la lettre i le symbole $\sqrt{-1}$, et l'on introduit la lettre i dans les calculs, comme si elle représentait une quantité réelle, en convenant que son carré i^2 égale -1.

Toutes les valeurs imaginaires peuvent être exprimées au moyen du symbole $\sqrt{-1}$ ou de la lettre i. Par exemple, l'équation

$$x^2 = -9$$

admet les deux solutions imaginaires

$$x = \pm \sqrt{-9}.$$

Si l'on observe que $-9 = 9 \times (-1)$ et si l'on applique

le théorème ordinaire sur la racine d'un produit, on écrira

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9}\times\sqrt{-1}=3i,$$

d'où

$$x=\pm 3i.$$

Considérons maintenant l'équation

$$x^2-6x+13=0,$$

qui se met sous la forme

$$(x-3)^2=-4.$$

Un carré ne pouvant être égal à la quantité négative -4 il est impossible de satisfaire à l'équation par des valeurs réelles. Mais, en extrayant la racine, on est conduit aux valeurs imaginaires

$$x-3=\pm\sqrt{-4},$$

d'où

$$x=3\pm\sqrt{-4};$$

en observant que $\sqrt{-4}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2i$, on les écrira

$$x=3\pm 2i.$$

Il en est de même de l'équation générale

$$x^2+px+q=0,$$

toutes les fois que la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ est négative. Car, cette équation étant mise sous la forme

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

on voit qu'il y a impossibilité d'y satisfaire par des valeurs réelles; mais on obtient les valeurs imaginaires

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

qui satisfont à l'équation, en convenant, comme nous l'a-

vous dit déjà, que le carré du symbole $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ égale $\frac{p^2}{4} - q$ dans tous les cas. Il en résulte pour x les deux valeurs imaginaires

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

ou

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \times \sqrt{-1}.$$

Ces deux valeurs sont ramenées à la forme $a \pm bi$, en représentant par a et b les deux quantités réelles $-\frac{p}{2}$ et $\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

140. Ainsi les quantités *imaginaires* sont des expressions de la forme

$$a + bi,$$

dans laquelle les lettres a et b représentent des quantités réelles quelconques (par opposition, on dit que les quantités ordinaires, positives ou négatives, sont *réelles*). On a étendu aux quantités imaginaires les règles ordinaires du calcul algébrique, comme si la lettre i désignait une quantité réelle, en convenant de remplacer dans les résultats i^2 par -1.

En résumant ce qui précède, on voit que l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

présente trois cas principaux :

1° Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est *positive*, l'équation a ses deux racines *réelles* et *inégales*.

2° Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est *nulle*, l'équation a ses deux racines *égales*. Ces deux racines égales sont toujours réelles ; car dans ce cas le radical est nul.

3° Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est *négative*, l'équation a ses deux racines *imaginaires*.

Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

141. Nous avons ramené l'équation générale du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

à la forme

$$x^2 + px + q = 0,$$

en divisant tous ses termes par le premier coefficient a, en posant

$$p = \frac{b}{a}, \qquad q = \frac{c}{a}.$$

Résolvant cette dernière, nous avons trouvé la formule

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Si, dans cette formule, nous remplaçons les lettres p et q par leurs valeurs $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, elle devient

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nous avons réduit au même dénominateur $4a^2$ les deux termes placés sous le radical, et nous avons extrait la racine de ce dénominateur, carré parfait. Nous obtenons ainsi la formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

qui est souvent usitée dans la pratique.

Elle présente les mêmes cas principaux que la formule primitive : 1° quand $b^2 - 4ac > 0$, les deux racines sont réelles et inégales ; 2° quand $b^2 - 4ac = 0$, les deux racines sont égales ; quand $b^2 - 4ac < 0$, les racines sont imaginaires.

142. Remarque. Il arrive souvent que le coefficient b contient le facteur 2. Dans ce cas, la formule peut être un peu simplifiée, ce qui la rend plus commode dans les applications. Posons $b = 2b'$, la formule devient

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a},$$

et, si l'on divise par 2 le numérateur et le dénominateur,

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Soit, par exemple, l'équation

$$3x^2 - 14x + 13 = 0.$$

Le second coefficient étant un nombre pair, on emploiera la dernière formule, et l'on écrira

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 39}}{3} = \frac{7 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Décomposition du trinôme $x^2 + px + q$ *en facteurs du premier degré.*

143. Soit le trinôme

$$x^2 + px + q,$$

dans lequel nous supposerons que la lettre x désigne une grandeur quelconque et tout à fait arbitraire. Si nous ajoutons et si nous retranchons $\frac{p^2}{4}$, la valeur du trinôme ne

change pas, et l'égalité

$$x^2+px+q=\left(x^2+px+\frac{p^2}{4}\right)-\left(\frac{p^2}{4}-q\right),$$

est vraie, quelle que soit la valeur de x. La première parenthèse est le carré du binôme $x+\frac{p}{2}$; la seconde peut être considérée comme le carré de $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. On a donc

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2.$$

Le second membre, qui est la différence des carrés de deux quantités, égale le produit de la somme de ces deux quantités par leur différence, et se décompose ainsi en deux facteurs du premier degré,

$$\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-p}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right).$$

Mais, si l'on appelle x' et x'' les deux racines de l'équation

$$x^2+px+q=0,$$

obtenue en égalant le trinôme à zéro, racines données par les formules

$$x'=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$
$$x''=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

on voit que les deux parenthèses ne sont autre chose que les deux différences $x-x'$ et $x-x''$. Il en résulte que le trinôme proposé peut être mis sous la forme

$$(x-x')(x-x'').$$

Cette décomposition du trinôme en deux facteurs du premier degré subsiste dans tous les cas, que les racines soient réelles ou imaginaires.

Applications. Considérons, par exemple, le trinôme

$$x^2 - 7x + 10.$$

Les deux racines de l'équation, obtenue en égalant ce trinôme à zéro, sont $x' = 2$, $x'' = 5$; on a donc

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5).$$

Cette égalité est vraie, quelle que soit la valeur de x.

Soit encore le trinôme

$$x^2 + 4x - 12.$$

Les deux racines de l'équation, obtenue en égalant ce trinôme à zéro, sont $x' = -6$, $x'' = 2$. On a donc identiquement, c'est-à-dire quelle que soit la valeur de x,

$$x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2).$$

144. La forme la plus générale du polynôme entier du second degré est

$$ax^2 + bx + c.$$

Si l'on met le coefficient a en facteur, et si l'on appelle p et q les quotients $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, ce polynôme s'écrit

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + px + q).$$

Le polynôme entre parenthèses se décomposant en deux facteurs $x - x'$ et $x - x''$, on a l'égalité

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x''),$$

quelle que soit la valeur de x.

Les lettres x' et x'' désignent les deux racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Relations entre les coefficients et les racines de l'équation $x^2+px+q=0$.

145. En appelant x' et x'' les deux racines de l'équation

$$x^2+px+q=0,$$

nous avons vu que le trinôme

$$x^2+px+q$$

peut être décomposé en deux facteurs du premier degré

$$(x-x')(x-x'').$$

Si l'on effectue la multiplication indiquée par les parenthèses, on reproduira évidemment le polynôme proposé. Le produit des deux facteurs est

$$x^2-(x'+x'')x+x'x''.$$

Pour que ce polynôme soit le même que le polynôme

$$x^2+px+q,$$

il faut que les coefficients soient les mêmes de part et d'autre. On a donc

$$x'+x''=-p,$$
$$x'x''=q.$$

Telles sont les deux relations fondamentales qui existent entre les racines de l'équation du second degré et les coefficients de l'équation ; nous nous en servirons fréquemment. On les énonce ainsi : *l'équation du second degré étant ramenée à la forme*

$$x^2+px+q=0,$$

1° *la somme algébrique des deux racines égale le coefficient de* x *changé de signe;* 2° *leur produit égale le terme connu.*

146. Remarque I. 1° Lorsque, dans l'équation du second degré

$$x^2+px+q=0,$$

le terme connu q est négatif, les racines sont toujours réelles

et inégales; car, dans ce cas, la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est essentiellement positive. En outre, ces deux racines sont de signes contraires, puisque leur produit est négatif.

Ainsi, le terme connu étant négatif, on peut dire *à priori* que l'équation

$$x^2 + 4x - 12 = 0,$$

a ses deux racines réelles et de signes contraires. La somme des deux racines étant égale à -4, la plus grande en valeur absolue est la racine négative. Et en effet, les deux racines sont -6 et $+2$, dont la somme est bien égale à -4 et le produit à -12.

2° Lorsque le terme connu est positif, il est nécessaire d'examiner le signe de la quantité $\frac{p^2}{4} - q$, pour savoir si les racines sont réelles ou imaginaires. Si cette quantité est positive, les deux racines sont réelles et de même signe, puisque leur produit est positif. La somme des deux racines étant égale à $-p$, ce signe commun est contraire à celui de p.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

La quantité $\frac{49}{4} - 10$ étant positive, les racines sont réelles. Leur produit étant positif, elles ont même signe. Leur somme étant égale à $+7$, elles sont positives. Et en effet, ces deux racines sont $+2$ et $+5$, dont la somme est $+7$ et le produit $+10$.

Soit encore l'équation

$$x^2 + 6x + 8 = 0.$$

La quantité $9 - 8$ étant positive, les racines sont réelles. Le produit étant positif, elles ont même signe. Leur somme étant égale à -6, elles sont toutes deux négatives. Et en effet, ces deux racines sont -4 et -2.

3° Lorsque le terme connu est très-petit en valeur abs
le produit des deux racines étant très-petit, l'une d'elles
cessairement une valeur numérique très-petite. Si le t
connu tend vers zéro, cette racine très-petite tendra
vers zéro. La somme des deux racines étant égale à —
l'une d'elle étant nulle, l'autre est égale à $-p$. Au reste,
ce cas, la résolution est facile, car l'équation se réduit

$$x^2 + px = 0,$$

et se met sous la forme

$$x(x + p) = 0.$$

On peut annuler ce produit de deux manières; en fais
soit $x = 0$, soit $x = -p$.

Exercices.

147. QUESTION I. Résoudre les deux équations

$$y + 2x = 5,$$
$$2y^2 - 3x^2 + 10x = 25.$$

Si de la première équation on tire la valeur de y,

$$y = 5 - 2x,$$

et qu'on la substitue dans la seconde on arrive à l'équ
du second degré

$$x^2 - 6x + 5 = 0,$$

d'où l'on déduit les deux valeurs

$$x = 1, \qquad x = 5.$$

En partant successivement chacune de ces deux val
dans l'équation

$$y = 5 - 2x,$$

on obtient les deux valeurs correspondantes de y

$$y = 3, \qquad y = -5.$$

Ainsi, les deux équations proposées admettent les deux solutions :

1re *solution :* $x=1$, $y=3$,
2e *solution :* $x=5$, $y=-5$.

En général, la résolution de deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré, l'autre du second degré, est ramenée à la résolution d'une équation du second degré à une inconnue.

148. QUESTION II. Résoudre les deux équations

$$x+y=8,$$
$$xy=15.$$

Quand on connaît la somme de deux quantités et leur produit, on voit immédiatement que ces deux quantités sont les racines d'une équation du second degré, ayant pour coefficient de la première puissance de l'inconnue la somme prise avec un signe contraire, et pour terme connu le produit. Dans l'exemple actuel, les valeurs de x et de y seront les racines de l'équation

$$u^2-8u+15=0;$$

et en effet, la somme des deux racines est égale à 8, et le produit à 15. Les deux racines de cette équation étant 3 et 5, on aura

$$x=3, \quad y=5,$$

ou

$$x=5, \quad y=3.$$

Les deux équations proposées sont *symétriques* par rapport aux deux inconnues, c'est-à-dire ne changent pas quand on permute les lettres x et y. Ceci explique pourquoi les valeurs des deux inconnues sont données par la même équation. En effet, si l'on élimine y entre les deux équations proposées, on arrive à l'équation

$$x^2-8x+15=0.$$

A cause de la symétrie, il est clair que si l'on éliminai au lieu de y, on arriverait nécessairement à la même équat

$$y^2 - 8y + 15 = 0.$$

Ainsi les valeurs des deux inconnues sont données pa même équation du second degré. C'est l'équation que n avons écrite immédiatement.

149. Question III. Résoudre les deux équations

$$y - x = 2,$$
$$xy = 15.$$

La première équation n'est pas symétrique par rapp aux lettres x et y; mais on peut la rendre symétrique posant

$$x = -x';$$

car alors les équations deviennent

$$y + x' = 2,$$
$$x'y = -15.$$

Les valeurs des deux inconnues x' et y sont données l'équation du second degré

$$u^2 - 2u - 15 = 0,$$

dont les racines sont -3 et $+5$. On a donc

$$x' = -3, \qquad y = 5,$$

ou

$$x' = 5, \qquad y = -3.$$

Ainsi les deux équations proposées admettent les d solutions

$$x = 3, \qquad y = 5.$$
$$x = -5, \qquad y = -3.$$

150. Question IV. Résoudre les deux équations

$$x + y = 8,$$
$$x^2 + y^2 = 34.$$

Si, de la première équation élevée au carré,

$$x^2 + 2xy + y^2 = 64,$$

on retranche la seconde, il vient

$$2xy = 30,$$

d'où

$$xy = 15.$$

On connaît la somme 8 des deux inconnues, et leur produit 15; la question est ramenée à la question II; les inconnues sont les racines de l'équation du second degré

$$u^2 - 8u + 15 = 0.$$

151. QUESTION V. Résoudre les deux équations

(1) $$x^2 + y^2 = 65,$$

(2) $$xy = 28.$$

Si à la première équation on ajoute la seconde multipliée par 2, il vient

$$x^2 + 2xy + y^2 = 121,$$

ou

$$(x + y)^2 = 121;$$

on déduit de là

(3) $$x + y = \pm 11.$$

Si de la première équation on retranche la seconde multipliée par deux, il vient de même

$$x^2 - 2xy + y^2 = 9,$$

ou

$$(x - y)^2 = 9;$$

on déduit de là

(4) $$x - y = \pm 3.$$

On connaît ainsi la somme et la différence des deux inconnues; il est aisé de trouver ces deux inconnues; les équations (3) et (4), ajoutées et retranchées, donnent

$$x = \frac{\pm 11 \pm 3}{2}, \qquad y = \frac{\pm 11 \mp 3}{2}.$$

Il en résulte les quatre systèmes

$$x = 7; \qquad y = 4,$$
$$x = 4, \qquad y = 7,$$
$$x = -7, \qquad y = -4,$$
$$x = -4, \qquad y = -7,$$

qui, en réalité, se réduisent à deux systèmes de égales et de signes contraires.

152. Question VI. Trouver quatre nombres e portion; connaissant la somme des extrêmes 21 des moyens 19, et la somme des carrés des termes 442.

Appelons x, y, z, t, les quatre nombres cherché avons les quatre équations

$$(1) \qquad \frac{x}{y}=\frac{z}{t}, \qquad \text{ou} \qquad xt=yz.$$

$$(2) \qquad x+t = 21,$$

$$(3) \qquad y+z = 19,$$

$$(4) \qquad x^2+y^2+z^2+t^2=442.$$

Nous connaissons la somme des deux inconnues x aussi celle des deux inconnues y et z; la questio résolue si nous connaissions leur produit commun x Élevons les équations (2) et (3) au carré, ajoutor retranchons l'équation (4), il vient

$$2xt+2yz=360,$$

ou

$$4xt=360,$$

$$xt=yz=90.$$

Les deux inconnues x et t seront données par l'équ second degré

$$u^2-21u+90=0,$$

qui a pour racines 6 et 15, et les deux inconnues y l'équation du second degré

$$u^2-19u+90=0,$$

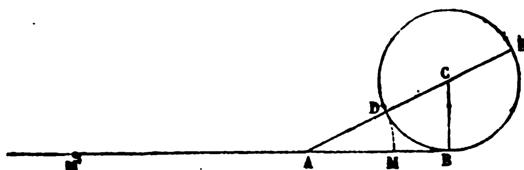
qui a pour racines 9 et 10. Les nombres cherchés sc

$$x=6, \qquad t=15,$$

$$y=9, \qquad z=10.$$

158. QUESTION VII. *Partager une droite donnée en moyenne et extrême raison.*

On sait que partager une droite AB en moyenne et extrême raison, c'est partager cette droite en deux parties AM et BM, telles que la plus grande AM soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière AB et la plus petite BM.



Si donc on appelle a la longueur de la droite AB, et x celle de la plus grande partie AM, la longueur de l'autre partie sera $a - x$, et l'on aura les rapports égaux

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x},$$

qui conduisent à l'équation du second degré

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

La première racine

$$x' = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

est positive et moindre que a (car $\sqrt{5}$ étant plus petit que 3, $\sqrt{5} - 1$ est plus petit que 2). Elle répond directement à la question proposée et donne la plus grande partie AM de la droite AB partagée en moyenne et extrême raison. Il est aisé de déduire de cette formule la construction géométrique connue. Si au point B on élève une per-

pendiculaire BC égale à la moitié de AB, l'hypoténuse AC sera égale à $\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$. Si, du point C comme centre, avec CB pour rayon, on décrit un cercle, la longueur AD sera égale à AC — CD, c'est-à-dire à $\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}-\frac{a}{2}$, ce sera précisément la racine x'. Il suffit maintenant de prendre sur AB une longueur AM égale à AD.

La seconde racine

$$x''=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=-\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$$

est négative et ne répond pas à la question. Cependant il est facile de lui donner une interprétation géométrique. Il suffit pour cela de modifier l'énoncé du problème de la manière suivante : *Sur la droite indéfinie* AB, *trouver un point tel que sa distance au point* A *soit moyenne proportionnelle entre la longueur* AB *et sa distance au point* B. La question ainsi posée admet deux solutions ; car, outre le point M que nous venons de déterminer, il existe vers la gauche un point M′ tel que la distance M′A est moyenne proportionnelle entre AB et M′B ; à cette seconde solution correspond la racine négative x'' qui, devant être portée en sens inverse de la première, c'est-à-dire de droite à gauche, donne la longueur AM′.

On construira cette seconde solution de la même manière que la première ; la longueur AE, étant égale à AC + CE, c'est-à-dire à $\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}$, est précisément la valeur absolue de x'' ; on prendra donc AM′ = AE.

154. Question VIII. *Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la hauteur et la différence des côtés de l'angle droit.*

Appelons x et y les deux côtés de l'angle droit, a leur différence donnnée, z l'hypoténuse et h la hauteur. On a les trois équations

$$(1)\qquad x-y=a,$$

$$(2)\qquad y^2+y^2=z^2,$$

$$(3)\qquad xy=hz.$$

On obtient la seconde en écrivant que le carré de l'hypoténuse égale la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit; la troisième, en remarquant que le double de la surface du triangle égale la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit, ou le produit de l'hypoténuse par la hauteur.

Il est facile d'éliminer x et y entre ces trois équations. Si, dans la première élevée au carré,

$$(4)\qquad x^2+y^2-2xy=a^2,$$

on remplace x^2+y^2 par z^2 et xy par zh, on a l'équation du second degré à une inconnue

$$(5)\qquad z^2-2hz=a^2,$$

d'où l'on déduit

$$z=h\pm\sqrt{h^2+a^2}.$$

La première racine est positive; le radical ayant une valeur plus grande que h, la seconde est négative. Comme les côtés du triangle doivent être nécessairement des nombres positifs, cette seconde racine ne convient pas à la question; on la rejettera et l'on ne conservera que la racine positive

$$(6)\qquad z=h+\sqrt{h^2+a^2}.$$

Une fois l'hypoténuse z connue, on obtiendra aisément x et y. A l'équation (4), ajoutons l'équation (3) multipliée par 4, il vient

$$x^2+y^2+2xy=a^2+4hz,$$

ou

$$(x+y)^2 = a^2 + 4hz,$$

(7) $$x + y = \sqrt{a^2 + 4hz}.$$

Cette équation donne la somme des deux côtés de l'angle droit ; comme on connaît déjà leur différence, ces deux côtés sont connus.

Application. $a = 1^m$, $h = 2^m,4$. La formule (6) donne $z = 5$; la formule (7) donne $x + y = 7$; comme on a déjà $x - y = 1$, il en résulte $x = 4$, $y = 3$.

155. QUESTION IX. *Trouver la profondeur d'un puits, en y laissant tomber une pierre, et notant le temps qui s'écoule entre le moment où on lâche la pierre et celui où l'on entend le bruit que fait la pierre en arrivant au fond du puits.*

Appelons x la profondeur du puits et t le temps que la pierre met à arriver au fond du puits. On sait que les corps en tombant parcourent des espaces proportionnels aux carrés des temps, de sorte que l'espace x parcouru par la pierre en t secondes sera $x = \frac{gt^2}{2}$, $\frac{g}{2}$ représentant l'espace parcouru dans la première seconde ; on en déduit $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$. D'autre part, on sait que le son se propage uniformément avec une vitesse de 340 mètres par seconde, vitesse que nous appellerons v ; ainsi le temps que met le son à remonter du fond du puits pour arriver à l'oreille est $\frac{x}{v}$. Mais le temps observé a est égal au temps que met la pierre à arriver au fond du puits, plus celui que le son emploie à revenir jusqu'en haut. On a donc l'équation

(1) $$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = a.$$

Si l'on fait passer le terme $\frac{x}{v}$ dans le second membre, l'équation devient

$$(2) \qquad \sqrt{\frac{2x}{g}} = a - \frac{x}{v}.$$

Si l'on élève les deux membres au carré, le radical disparaît et l'on obtient l'équation du second degré

$$(3) \qquad \frac{2x}{g} = \left(a - \frac{x}{v}\right)^2,$$

ou, en développant, et multipliant par v^2,

$$(4) \qquad x^2 - 2v\left(a + \frac{v}{g}\right)x + a^2v^2 = 0.$$

On en déduit

$$(5) \qquad x = v\left(a + \frac{v}{g}\right) \pm v\sqrt{\left(a + \frac{v}{g}\right)^2 - a^2},$$

ou, en simplifiant,

$$(6) \qquad x = v\left[a + \frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v}{g}\left(\frac{v}{g} + 2a\right)}\right].$$

On voit que les racines sont réelles; elles sont positives, puisque leur somme et leur produit sont positifs.

Il est évident *à priori* que la question proposée admet toujours une solution et n'en admet qu'une; voici d'où proviennent les deux racines positives. L'équation du problème est l'équation (1) ou l'équation (2); or nous remarquons que l'équation (3), obtenue par l'élévation au carré, n'est pas équivalente à l'équation (2); car, si l'on élève au carré les deux membres de l'équation

$$(7) \qquad -\sqrt{\frac{2x}{g}} = a - \frac{x}{v},$$

on obtient la même équation (3). Ainsi l'équation (3) comprend, non-seulement les solutions de l'équation (2), mais

encore celles de l'équation (7). Il faut donc examiner quell est celle des racines trouvées qui convient à la question. L première, celle qui est donnée par le signe + placé devan le radical, ayant une valeur plus grande que av, rend néga tive l'expression $a - \frac{x}{v}$, et satisfait par conséquent, non l'équation (2), mais à l'équation (7); elle doit être rejetée

L'autre racine

$$(8) \qquad x = v\left[a + \frac{v}{g} - \sqrt{\frac{v}{g}\left(\frac{v}{g} + 2a\right)}\right]$$

a une valeur moindre que av; car la valeur du radical étan plus grande que $\frac{v}{g}$, la parenthèse est moindre que a; ell satisfait donc à l'équation (2), c'est-à-dire à l'équation d problème. Ainsi la profondeur du puits est donnée par l formule (8).

156. Remarque. Pour résoudre la question précédente nous avons élevé au carré les deux membres de l'équatio irrationnelle (2), ce qui nous a conduit à l'équation entièr du second degré (4); et nous avons vu que l'une des racine de cette équation convient à l'équation (2), l'autre à l'équa tion conjuguée (7), déduite de la première par le change ment de signe du radical. Il n'en est pas toujours ainsi quelquefois les deux racines de l'équation entière convien nent toutes deux à l'équation irrationnelle proposée, d'autre fois aucune d'elles ne la vérifie.

Soit, par exemple, à résoudre l'équation

$$(1) \qquad x - 1 = \sqrt{3x - 5}.$$

Si l'on élève les deux membres au carré, on obtient l'équa tion du second degré

$$(2) \qquad x^2 - 5x + 6 = 0,$$

qui admet, non-seulement les racines de l'équation (1), mais encore celles de l'équation conjuguée

$$(3) \qquad x - 1 = -\sqrt{3x - 5}.$$

Les deux racines de l'équation (2) sont $x = 2$ et $x = 3$; chacune d'elles rend positif le premier membre de l'équation (1), elles conviennent donc toutes les deux à l'équation (1) et aucune d'elles ne vérifie l'équation (3).

De même, si l'on voulait résoudre l'équation

$$(4) \qquad 1 - x = \sqrt{3x - 5},$$

qui est la même que l'équation (3), on serait encore amené à l'équation (2); les deux racines, rendant négatif le premier membre de l'équation (4), conviennent à l'équation conjuguée (1); on en conclut que l'équation proposée (4) n'admet aucune solution.

Considérons encore l'équation irrationnelle

$$(5) \qquad x - 1 = \sqrt{x^2 - 3},$$

qui, par l'élévation au carré, conduit à l'équation du premier degré

$$x = 2.$$

Cette valeur $x = 2$, rendant positif le premier membre, convient à l'équation proposée; l'équation conjuguée

$$x - 1 = -\sqrt{x^2 - 3},$$

ou

$$1 - x = \sqrt{x^2 - 3}$$

n'admet aucune solution.

** Lorsque, dans l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$, a *tend vers zéro, l'une des racines croît indéfiniment.*

157. Supposons, pour fixer les idées, que le second coefficient b ait une valeur positive, et désignons par x' et x''

les deux racines

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Le coefficient a étant très-petit, la quantité $4ac$ sera elle-même très-petite; $b^2 - 4ac$ différera très-peu de b^2, et $\sqrt{b^2 - 4ac}$ de b; le numérateur de x' sera à peu près égal à $-2b$, et la valeur de x' différera très-peu de $-\frac{2b}{a}$. Le dénominateur étant très-petit, le quotient sera très-grand, et la racine x' aura une valeur très-grande, abstraction faite du signe. On voit ainsi que, lorsque le coefficient a diminue et tend vers zéro, cette racine croît indéfiniment.

L'autre racine x'' conserve au contraire une valeur finie et tend vers la valeur $-\frac{c}{b}$, quand a tend vers zéro. On remarque d'abord que le numérateur étant à peu près égal à $-b + b$, a une valeur très-petite. Cette racine est donc le quotient de deux quantités très-petites, et elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, quand a tend vers zéro. Afin de reconnaître sa valeur, nous transformerons cette expression en multipliant son numérateur et son dénominateur par $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$, ce qui donne

$$x'' = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(-b - \sqrt{b^3 - 4ac}\right)}{2a\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}.$$

Au numérateur, la première parenthèse étant la somme des deux quantités $-b$ et $\sqrt{b^2 - 4ac}$, la seconde la différence de ces deux mêmes quantités, le produit des deux paren-

thèses égale la différence des carrés, et l'on a

$$x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}.$$

Si l'on supprime maintenant le facteur commun $2a$, qui rend les deux termes de la fraction très-petits, il vient

$$x'' = -\frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

L'expression mise sous cette forme, toute difficulté disparait; le dénominateur différant très-peu de $2b$, la valeur de x'' est à peu près égale à $-\frac{c}{b}$, et quand a tend vers zéro, cette racine tend elle-même vers la valeur finie $-\frac{c}{b}$.

Au reste, quand a tend vers zéro, l'équation du second degré se réduit à une équation du premier degré

$$bx + c = 0.$$

La racine $x'' = -\frac{c}{b}$ est précisément la solution de cette équation du premier degré. L'autre racine x', devenant infinie, disparaît.

* *Calcul numérique des deux racines quand a est très-petit.*

158. Nous avons dit que lorsque, dans l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

le coefficient a est très-petit, l'une des racines est très-grande en valeur absolue, tandis que l'autre racine conserve une valeur finie. Nous allons indiquer un moyen rapide de calculer approximativement la valeur de cette seconde racine. En faisant passer les termes $ax^2 + c$ dans le se-

cond membre, et divisant par b, nous mettons l'équation sous la forme

$$(1) \qquad x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}.$$

Le coefficient a étant très-petit, et l'inconnue x ayant une valeur finie, le terme $\frac{ax^2}{b}$ a une valeur très-petite relavivement à celle de x; si donc on néglige ce terme, on aura une première valeur approchée de l'inconnue,

$$x = -\frac{c}{b}.$$

Si maintenant, dans le second membre de l'équation (1), nous remplaçons x par la valeur raprochée $x = -\frac{c}{b}$, nous obtiendrons une seconde valeur

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3},$$

beaucoup plus approchée que la première. Ordinairement, dans la pratique, cette seconde valeur est suffisamment approchée. Cependant, si l'on veut une approximation encore plus grande, on la substituera dans le second membre de l'équation (1), ce qui donnera une troisième valeur encore plus approchée, et ainsi de suite. Cette méthode est connue sous le nom de méthode des *approximations successives*; elle est souvent employée en astronomie. Quelques exemples en feront bien comprendre l'usage.

EXEMPLE :

1° Soit l'équation

$$0,001x^2 + x - 1 = 0.$$

Calculons d'abord la racine qui a une valeur finie. Nous écrirons cette équation sous la forme

$$(1) \qquad x = 1 - 0,001x^2.$$

Négligeant le second terme, qui a une valeur très-petite relativement à x, nous avons la première valeur approchée

$$x = 1.$$

Substituant dans le second membre cette première valeur approchée, nous avons la seconde valeur approchée

$$x = 1 - 0,001 = 0,999.$$

Substituant dans le second membre cette seconde valeur approchée, nous avons la troisième valeur approchée

$$x = 1 - 0,001 \times \overline{0,999}^2 = 0,999001999.$$

On voit que l'erreur commise sur la seconde valeur approchée est très-petite ; car la correction suivante est moindre que 2 millioniėmes. Ainsi, nous arrêtant à la seconde approximation, nous prendrons pour valeur de la racine cherchée $x = 0,99900$.

L'équation admet une autre racine, très-grande en valeur absolue. La somme des deux racines étant égale à $-\frac{1}{0,001}$, c'est-à-dire à -1000, nous aurons pour valeur approchée de cette seconde racine

$$x = -1000 - 0,99900 = -1000,99900.$$

2° Soit l'équation

$$0,03x^2 - 5x + 7 = 0,$$

ou

$$x = \frac{7}{5} + \frac{0,03}{5}x^2 = 1,4 + 0006x^2.$$

Première valeur approchée

$$x = 1,4.$$

Seconde valeur approchée

$$x = 1,4 + 0,006 \times \overline{1,4}^2 = 1,41176,$$

ou, plus simplement,

$$x = 1,412.$$

La somme des racines étant égale à $\frac{5}{0,03}$ ou à 166,667, plus grande racine est approximativement 165,255.

3° Nous avons vu que la profondeur d'un puits dét minée par la chute d'une pierre (n° 155), est donnée] la plus petite racine de l'équation

$$\frac{x^2}{v^2} - 2\left(a + \frac{v}{g}\right)\frac{x}{v} + a^2 = 0;$$

d'où

$$\frac{x}{v} = \frac{a^2}{2\left(a + \frac{v}{g}\right)} + \frac{1}{2\left(a + \frac{v}{g}\right)}\,\frac{x^2}{v^2}.$$

La vitesse c du son est de 340 mètres par seconde; constante g est égale à 9,8088. Ordinairement la quantit est une fraction assez petite; car les puits les plus profoi dépassent rarement 100 mètres; le second terme du secc membre sera donc très-petit par rapport au premier terr En le négligeant, on aura une première valeur approcl

$$\frac{x}{v} = \frac{a^2}{2\left(a + \frac{v}{g}\right)}.$$

On obtiendra ensuite des valeurs de plus en plus rapp chées par la méthode des approximations successives.

Supposons, par exemple, qu'il se soit écoulé 5 secon entre le moment où on a lâché la pierre et celui où le br est arrivé à l'oreille. On trouvera, pour la première val approchée,

$$\frac{x}{v} = \frac{25}{2(5 + 34,663)} = 0,31515.$$

On remplacera ensuite $\frac{x}{v}$ par cette valeur dans le secc

membre de l'équation, et l'on aura pour seconde valeur approchée

$$\frac{x}{v} = 0{,}31515 + 0{,}00125 + 0{,}3164,$$

d'où

$$x = 107^{m}{,}6.$$

159. Remarque. Lorsque, dans l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

le terme connu c est très-petit, sans que le premier coefficient a le soit en même temps, le produit $\frac{c}{a}$ des racines est très-petit, et par conséquent l'une des racines est très-petite. On peut calculer cette racine par la méthode des approximations successives. En effet, mettons l'équation sous la forme

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}.$$

Le terme $\frac{ax^2}{b}$ est très-petit relativement à x (car le rapport de ce terme à x est $\frac{ax}{b}$, quantité très-petite). En négligeant ce terme, on aura donc une première valeur approchée de la racine cherchée

$$x = -\frac{c}{b}.$$

Substituant cette valeur approchée dans le second membre, on aura une seconde valeur

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3},$$

plus approchée que la précédente, et ainsi de suite.

Exemple. Soit l'équation

$$x^2 + 2x - 0{,}1 = 0,$$

que l'on écrira sous la forme

$$x = 0,05 - \frac{x^2}{2}.$$

La petite racine a pour première valeur approchée

$$x^2 = 0,05,$$

pour seconde valeur approchée

$$x = 0,05 - 0,00125 = 0,04875.$$

CHAPITRE III.

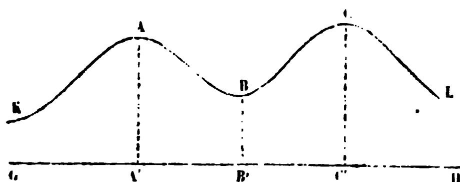
DES QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM QUI PEUVENT SE RÉSOUDRE PAR LES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

---

160. Lorsqu'une grandeur variable après avoir augmenté pendant un certain temps, diminue ensuite, elle passe par une valeur plus grande que les valeurs voisines, celles qui précèdent et celles qui suivent immédiatement : on dit qu'elle passe par un *maximum*.

Au contraire, lorsqu'une grandeur variable, après avoir diminué pendant un certain temps, augmente ensuite, elle passe par une valeur plus petite que les valeurs voisines, celles qui précèdent et celles qui suivent immédiatement; on dit dans ce cas qu'elle passe par un *minimum*.

Considérons, par exemple, la section d'un terrain accidenté par un plan vertical, et supposons que l'on mesure



la hauteur des différents points de cette courbe au-dessus du plan horizontal GH. Le sommet A d'une colline sera un maximum, le fond B d'une vallée un minimum. Si l'on parcourt cette ligne dans le sens KL, après s'être élevé jusqu'au point A, on descendra ensuite de A vers B; la hau-

teur AA′ du point A est plus grande que celle des point voisins, d'un côté ou de l'autre ; c'est un maximum. E continuant le mouvement, on descendra jusqu'au point pour monter ensuite de B vers C ; la hauteur BB′ du point est plus petite que celle des points voisins, d'un côté ou d l'autre ; c'est un minimum. On trouve ensuite un nouvea maximum CC′, etc.

Nous allons étudier quelques questions simples qui peu vent être résolues par des polynômes ou des équations du second degré.

161. Question I. *Partager un nombre donné en deux parties de manière que leur produit soit maximum.*

Première méthode. Appelons a le nombre donné, x l'un des parties, y le produit; l'autre partie sera $a - x$, et l'o aura

$$y = x(a - x).$$

Faisons varier x de o à a; quand $x = 0$, le produit y es nul ; quand x atteint la valeur a, le produit redevient nul Ainsi la quantité y est partie de zéro pour revenir à zéro dans l'intervalle elle a pris une série de valeurs positive finies ; elle a augmenté d'abord pour diminuer ensuite ; ell a donc passé par un *maximum.*

Pour étudier la variation de ce produit, nous l'écriron sous la forme suivante

$$x = ax - x^2 = \frac{a^2}{4} - \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

La quantité y est la différence de deux quantités positives l'une fixe, l'autre variable; elle atteint sa plus grande valeu ou son maximum $\frac{a^2}{4}$, quand le terme à retrancher $\left(\frac{a}{2} - x\right)$ est nul, c'est-à-dire lorsque $x = \frac{a}{2}$, et alors l'autre pa

tie $a - x$ est aussi égale à $\frac{a}{2}$. Ainsi, ***le produit de deux facteurs, dont la somme est constante, est maximum, quand ces deux facteurs sont égaux entre eux.***

Il est facile de suivre les variations qu'éprouve le produit y quand x varie de o à a. Quand x croît de o à $\frac{a}{2}$, le terme à retrancher $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ diminuant de plus en plus, la quantité y augmente de zéro à la valeur maximum $\frac{a^2}{4}$; quand x dépasse $\frac{a}{2}$ et varie de $\frac{a}{2}$ à a, le terme à retrancher $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ ou $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$ augmentant de plus en plus, y diminue au contraire de $\frac{a^2}{4}$ à zéro, en repassant par les mêmes valeurs que précédemment. Si l'on fait croître x au delà de a, l'autre partie $a - x$ devient négative et croît en valeur absolue, leur produit $x\ (a-x)$ devient négatif et croît aussi en valeur absolue ; donc la valeur relative de y diminue indéfiniment. Il en est de même si l'on donne à x des valeurs négatives.

A cette question abstraite correspond la question géométrique suivante : *De tous les rectangles de même périmètre quel est le plus grand ?* Car, si l'on appelle $2a$ le périmètre donné, x la base, $a - x$ étant la hauteur, la surface sera représentée par le produit $x\ (a-x)$ de deux facteurs dont la somme est constante. Nous avons vu que ce produit acquiert sa valeur maximum quand les deux facteurs sont égaux entre eux ; ainsi, de tous les rectangles de même périmètre, le plus grand est le carré

Il est aisé de suivre la variation du rectangle : quand $x = o$, la hauteur est égale à a et le rectangle se réduit à une ligne droite de longueur a; l'aire est nulle. Si l'on

fait croître la base x de o à $\frac{a}{2}$, l'aire augmente progressivement de o à la valeur maximum $\frac{a^2}{4}$. La base x continuant à croître de $\frac{a}{2}$ à a, l'aire diminue de cette valeur maximum à o, en repassant par les mêmes valeurs que précédemment. A la fin, quand $x = a$, la hauteur est nulle et le rectangle se réduit de nouveau à une ligne droite; l'aire redevient nulle. Dans cette question géométrique, la variable x ne peut ni dépasser a ni prendre des valeurs négatives.

A la même question se rattache encore cet autre problème de géométrie : *Parmi tous les triangles de même base et de même périmètre, quel est le plus grand?* Si l'on appelle $2p$ le périmètre donné, a le côté constant, b et c les deux côtés variables, on sait que la surface du triangle est exprimée par la formule

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Nous pouvons faire abstraction des deux facteurs constants p, $p-a$ et considérer seulement les deux facteurs variables $p-b$, $p-c$, dont la somme $2p-b-c$ ou a est constante. Si l'on représente par x le premier facteur, le second étant $a-x$, on a à considérer le produit $x(a-x)$; d'ailleurs x varie de o à a; le produit acquiert sa valeur maximum quand les deux facteurs sont égaux entre eux ; il s'ensuit que le triangle maximum est le triangle *isocèle*. Plus les deux côtés variables diffèrent entre eux, plus la surface du triangle est petite.

162. *Deuxième méthode.* On peut traiter la question précédente par une autre méthode dont nous nous servirons par la suite ; proposons-nous d'abord la question suivante : *Partager le nombre* a *en deux parties dont le produit soit*

égal à une quantité donnée m. Si l'on désigne ces deux parties par x et y, on a les deux équations

$$x + y = a,$$
$$xy = m.$$

On connaît la somme et le produit des deux inconnues x et y; par conséquent ces deux inconnues sont les deux racines de l'équation du second degré

$$u^2 - au + m = 0.$$

Ainsi les valeurs de x et de y sont données par la formule

$$u = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - m};$$

l'une des racines est la valeur de x, l'autre celle de y.

La question n'est possible que si les racines sont réelles; il faut donc que la quantité placée sous le radical soit positive, c'est-à-dire que le produit m soit moindre que $\frac{a^2}{4}$. D'autre part, on peut donner à m une valeur quelconque moindre que $\frac{a^2}{4}$; car à une telle valeur correspondent deux racines réelles, c'est-à-dire un mode de partage qui la fournit. Ainsi le produit m prend toutes les valeurs plus petites que $\frac{a^2}{4}$, et n'en prend aucune plus grande; sa valeur la plus grande, ou son maximum, est $\frac{a^2}{4}$. Mais, lorsque $m = \frac{a^2}{4}$, le radical est nul et les deux racines sont égales; le produit acquiert donc sa valeur maximum, quand on partage le nombre a en deux parties égales.

163. QUESTION II. *Partager un nombre donné en deux parties telles que la somme de leurs carrés soit minimum.*

Première méthode. Appelons a le nombre donné, x l'une

des parties, l'autre sera $a-x$ et la somme y de de leurs c
sera représentée par

$$y=x^2+(a-x)^2.$$

Cette expression peut être mise sous la forme sui

$$y=2x^2-2ax+a^2=2\left(x^2-ax+\frac{a^2}{2}\right)=2\left[\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}\right)+\left(\frac{a^2}{2}-\right.\right.$$

ou

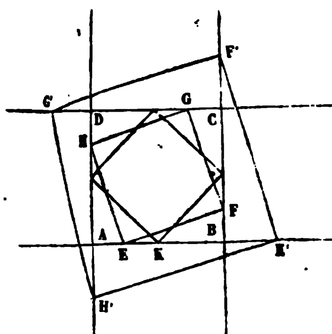
$$y=\frac{a^2}{2}+2\left(\frac{a}{2}-x\right)^2.$$

La quantité y est la somme de deux quantités posit
l'une fixe, l'autre variable. Si l'on fait croître x de o
le terme variable diminuant, y diminue de a^2 à $\frac{a^2}{2}$; x
tinuant à croître de $\frac{a}{2}$ à a, le terme variable $2\left(x-\right.$
augmentant, y augmente de $\frac{a^2}{2}$ à a^2. Ainsi, la quant
diminue d'abord pour augmenter ensuite; elle passe
par un minimum. Ce minimum $\frac{a^2}{2}$ a lieu pour $x=\frac{a}{2}$, c
à-dire quand on partage le nombre donné a en deux
ties égales.

Si l'on fait croître x au delà de a, l'autre partie a
devient négative, mais son carré reste positif, et la so
augmente indéfiniment. Il en est de même si l'on donn
des valeurs négatives.

A cette question algébrique se rattache l'*étude de la
riation du carré inscrit dans un carré donné*. Si sur les

du carré donné ACBD, à partir des sommets et en tournant dans le même sens, on porte quatre longueurs égales AE, BF, CG, DH, et si l'on joint les points ainsi obtenus, on forme un carré inscrit EFGH. Appelons a le côté du carré donné, x la longueur variable AE, l'aire y du carré inscrit est représentée par l'expression



$$y = \overline{EH}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AH}^2 = x^2 + (a - x)^2,$$

que nous avons mise sous la forme

$$y = \frac{a^2}{2} + 2\left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

Faisons varier x de o à a ; quand $x =$ o, le carré inscrit coïncide avec le carré donné ABCD, l'aire est égale à a^2; x croissant de o à $\frac{a}{2}$, l'aire du carré inscrit diminue de a^2 à $\frac{a^2}{2}$; x continuant à croître de $\frac{a}{2}$ à a, l'aire croît de $\frac{a^2}{2}$ à a^2; enfin, quand x devient égal à a, le carré inscrit coïncide de nouveau avec le carré donné. Ainsi, l'aire du carré inscrit diminue d'abord de a^2 à $\frac{a^2}{2}$ pour augmenter ensuite de $\frac{a^2}{2}$ à a^2; elle passe donc par une valeur minimum $\frac{a^2}{2}$ et l'on obtient ce carré minimum en joignant les milieux des côtés du carré donné.

Si l'on prolonge indéfiniment les côtés du carré donné

toute restriction disparaîtra, et l'on pourra donner à x des valeurs positives plus grandes que a et aussi des valeurs négatives (le carré inscrit E'F'G'H' correspond à une valeur AE' plus grande que a). De cette manière le carré inscrit augmente indéfiniment.

A cette même question se rattache encore l'*étude de la variation de la diagonale d'un rectangle dont le périmètre est constant.* Car si l'on appelle $2a$ le périmètre donné, x la base, $a-x$ la hauteur, la diagonale y sera

$$y=\sqrt{x^2+(a-x)^2}.$$

Quand $x=0$ le rectangle se réduit à une ligne droite de longueur a et la diagonale est égale à a. Si l'on fait croître x de 0 à $\frac{a}{2}$, la diagonale diminue de a à $\frac{a}{\sqrt{2}}$; x continuant à croître de $\frac{a}{2}$ à a, la diagonale augmente de $\frac{a}{\sqrt{2}}$ à a; à la fin, quand $x=a$, le rectangle se réduit de nouveau à une ligne droite et la diagonale redevient égale à a. Ainsi la diagonale acquiert sa valeur minimum pour $x=\frac{a}{2}$, c'est-à-dire quand le rectangle est un carré.

Les deux côtés du rectangle ayant des valeurs essentiellement positives, on ne peut pas faire croître x au delà de a, ni lui donner des valeurs négatives; la diagonale a donc sa plus grande valeur a pour $x=0$ ou $x=a$, c'est-à-dire quand le rectangle se réduit à une ligne droite.

164. *Deuxième méthode.* Proposons-nous d'abord la question suivante : *Partager le nombre* a *en deux parties telles que la somme de leurs carrés soit égale à* m. En appelant x et y ces deux parties, on a les deux équations

$$x+y=a,$$
$$x^2+y^2=m.$$

Nous connaissons déjà la somme des deux inconnues; si nous pouvions trouver leur produit, nous obtiendrions ces deux inconnues par une même équation du second degré. Or ceci est facile. En élevant au carré les deux membres de la première équation, on a

$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2;$$

si l'on en retranche la seconde, on trouve

$$2xy = a^2 - m,$$

d'où

$$xy = \frac{a^2 - m}{2}.$$

Ainsi les inconnues x et y sont les deux racines de l'équation du second degré

$$u^2 - au + \frac{a^2 - m}{2} = 0;$$

elles sont données par la formule

$$u = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 - m}{2}} = \frac{a \pm \sqrt{2m - a^2}}{2};$$

l'une des racines est la valeur de x, l'autre celle de y.

Pour que la question soit possible, il faut que la quantité placée sous le radical soit positive, c'est-à-dire que la valeur de m soit plus grande que $\frac{a^2}{2}$. D'autre part, on peut donner à m une valeur quelconque plus grande que $\frac{a^2}{2}$; car à une telle valeur correspondent des valeurs réelles de x et de y. Ainsi la quantité m prend toutes les valeurs plus grandes que $\frac{a^2}{2}$ et n'en prend aucune plus petite; sa valeur la plus petite, ou son minimum, est $\frac{a^2}{2}$. Lorsque $m = \frac{a^2}{2}$, les deux racines sont égales; la somme des carrés acquiert

donc sa valeur minimum quand le nombre a est partagé en deux parties égales.

165. Question III. Les questions que nous avons traitées jusqu'à présent rentrent dans la question générale suivante : *étudier la variation du trinôme du second degré* $ax^2 + bx + c$.

Si l'on met le coefficient a en facteur, le trinôme, dont nous désignerons la valeur par y, s'écrit sous la forme

$$y = a(x^2 + px + q).$$

Il y a trois cas principaux à distinguer :

1° $\frac{p^2}{4} - q > 0$. Les racines de l'équation obtenue en égalant le trinôme à zéro, sont réelles, et le trinôme se décompose en facteurs réels du premier degré (n° 144)

$$(1) \qquad y = a(x - x')(x - x'');$$

nous appelons x' la plus petite racine, x'' la plus grande. Quand x varie de x' à x'', le facteur $x - x'$ étant positif, le facteur $x - x''$ négatif, leur produit est négatif et le trinôme a un signe contraire à celui de a. Quand x dépasse x'' et croît indéfiniment, les deux facteurs $x - x'$, $x - x''$ étant positifs, leur produit est lui-même positif et augmente indéfiniment; le trinôme a le même signe que a. Quand au contraire x est plus petit que x' et diminue indéfiniment, les deux facteurs étant négatifs, leur produit est positif et augmente indéfiniment ; le trinôme a encore le signe de a.

En résumé, le trinôme a un signe contraire à celui de a pour toutes les valeurs de x comprises entre les deux racines x' et x'', et il a le même signe que a pour toutes les valeurs de x extérieures aux racines, c'est-à-dire plus grandes que la plus grande, ou plus petites que la plus petite. Il change donc deux fois de signe; une première fois quand x passe par les

racine x', une seconde fois quand x passe par la racine x'', et ces changements de signe s'opèrent quand le trinôme s'annule.

Si l'on complète le carré dont $x^2 + px$ sont les deux premiers termes, le trinôme s'écrit

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)\right],$$

ou, plus simplement,

$$(2) \qquad y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - k^2\right],$$

en désignant par k^2 la quantité positive $\frac{p^2}{4} - q$. La parenthèse est la différence de deux carrés, l'un fixe, l'autre variable. A l'aide des formes (1) et (2), il est facile d'étudier la variation du trinôme. Supposons d'abord le coefficient a positif; x variant de $-\infty$ à x', y diminue de $+\infty$ à 0; x variant de x' à $-\frac{p}{2}$, y continue à diminuer de 0 à la valeur négative $-ak^2$; x variant de $-\frac{p}{2}$ à x'', y croît de $-ak^2$ à 0; x croissant ensuite de x'' à $+\infty$, y augmente de 0 à $+\infty$. En résumé, y diminue de $+\infty$ à $-ak^2$ pour augmenter ensuite jusqu'à $+\infty$; cette valeur négative $-ak^2$ est un *minimum*; on l'obtient quand $x = -\frac{p}{2} = \frac{x' + x''}{2}$.

Supposons maintenant le coefficient a négatif; x variant de $-\infty$ à x', y croît de $-\infty$ à 0; x variant de x' à $-\frac{p}{2}$, y croît encore de 0 à la valeur positive $-ak^2$; x variant ensuite de $-\frac{p}{2}$ à x'' et de x'' à $+\infty$, y diminue de $-ak^2$ à 0, puis de 0 à $-\infty$; ainsi la valeur positive $-ak^2$ est un *maximum*; on l'obtient pour $x = -\frac{p}{2} = \frac{x' + x''}{2}$.

2° $\frac{p^2}{2} - q < 0$. Les racines sont imaginaires et le trinôme prend la forme

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right],$$

ou plus simplement,

$$(3) \qquad y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k^2\right],$$

en désignant par k^2 la quantité positive $q - \frac{p^2}{4}$. La parenthèse est la somme de deux carrés, l'un fixe, l'autre variable ; quelle que soit la valeur de x, elle reste toujours positive et le trinôme conserve le signe de a. La parenthèse devient minimum quand $x = -\frac{p}{2}$. Si partant de cette valeur $-\frac{p}{2}$, x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la parenthèse augmente indéfiniment. A ce minimum de la parenthèse correspond un minimum ou un maximum du trinôme, suivant que a est positif ou négatif.

3° $\frac{p^2}{4} - q = 0$. Les racines sont égales et le trinôme s'écrit

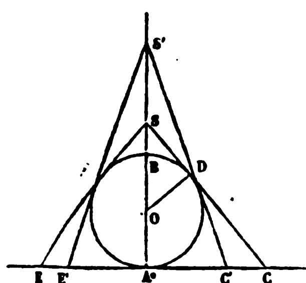
$$(4) \qquad y = a\left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

C'est un carré parfait ; y conserve toujours le signe de a, et admet le minimum zéro en valeur absolue.

166. Question IV. *De tous les cônes circonscrits à une sphère donnée, quel est le plus petit ?*

Soit AB un diamètre fixe de la sphère ; menons par le point A un plan tangent à la sphère et sur le prolongement du diamètre AB prenons un point quelconque S pour

sommet du cône circonscrit. Si le sommet S se rapproche du point B, le cône, s'évasant de plus en plus, augmente indéfiniment ; si au contraire le sommet S s'éloigne du point B, le cône, s'allongeant de plus en plus, et ayant toujours une base plus grande qu'un grand cercle de la sphère, augmente aussi indéfiniment. Ainsi, lorsqu'on fait glisser le sommet S sur le prolongement du diamètre à partir du point B, on voit que le cône circonscrit, d'abord infiniment grand, commence par diminuer pour augmenter ensuite et redevenir indéfiniment grand, il passe donc par une valeur plus petite que toutes les autres, c'est-à-dire par un minimum.



Le volume du cône a pour mesure

$$\tfrac{1}{3}\pi\overline{AC}^2 \times SA.$$

Appelons r le rayon de la sphère et x la distance BS. On a

$$SA = 2r + x.$$

Les triangles semblables SAC, SOD donnent la proportion

$$\frac{AC}{OD} = \frac{SA}{SD};$$

d'où l'on déduit, en remarquant que la tangente SD, moyenne proportionnelle entre SA et SB, égale $\sqrt{x(2r+x)}$,

$$AC = \frac{r(2r+x)}{\sqrt{x(2r+x)}}, \qquad \overline{AC}^2 = \frac{r^2(2r+x)}{x}.$$

Si l'on remplace les quantités AC et SA par leurs valeurs, le volume du cône aura pour expression

$$\tfrac{1}{3}\pi r^2 \frac{(2r+x)^2}{x}.$$

Proposons-nous d'abord cette question : circonscrire à la sphère un cône de volume donné. Si, pour simplifier, nous représentons le volume donné par $\frac{4}{3}\pi r^2 m$, nous aurons l'équation

$$\frac{(2r+x)^2}{x} = 4m,$$

qui, mise sous forme entière, devient

$$x^2 - 4(m-r)x + 4r^2 = 0.$$

On en déduit

$$x = 2(m-r) \pm 2\sqrt{(m-r)^2 - r^2},$$

et, en simplifiant la quantité placée sous le radical,

$$x = 2(m-r) \pm 2\sqrt{m(m-2r)}.$$

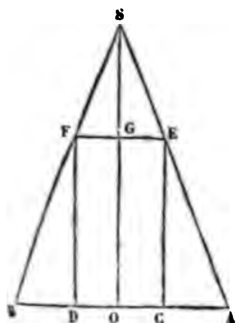
Pour que x soit réelle, il est nécessaire et il suffit que la quantité positive m soit plus grande que $2r$; donc m a un minimum $2r$, et quand on donne à m cette valeur on trouve $x = 2r$. Ainsi le plus petit cône S'C'E' circonscrit à la sphère a une hauteur S'A double du diamètre de la sphère; le volume de ce cône minimum est $\frac{8}{3}\pi r^3$; c'est le double du volume de la sphère.

A toute valeur de m plus grande que $2r$ correspondent deux valeurs de x réelles et positives; il existe donc deux cônes ayant un même volume quelconque plus grand que le minimum; l'un a une hauteur plus grande que la hauteur S'A du cône minimum, l'autre une hauteur plus petite. En effet, la valeur de x donnée par le signe $+$ devant le radical est plus grande que $2(m-r)$, et à plus forte raison plus grande que $2r$, puisque m est plus grand que $2r$; le produit des deux racines étant égal à $4r^2$, et l'une d'elles étant $> 2r$, l'autre sera $< 2r$.

Ce qui précède montre bien que, lorsque x croît de 0

à $2r$, le volume du cône diminue de l'infini à sa valeur minimum $\frac{8}{3}\pi r^3$, et que lorsque x continue à croître au delà de $2r$, le volume augmente ensuite indéfiniment.

167. Question V. ***Étudier la variation de la surface totale du cylindre inscrit dans un cône donné.***



Désignons par r le rayon OA de la base du cône, et par h sa hauteur SO; appelons x le rayon OC de la base du cylindre inscrit, y la hauteur OG. Les triangles semblables ECA, SOA, donnent la proportion

$$\frac{y}{h}=\frac{r-x}{r}, \quad \text{d'où} \quad (1) \quad y=\frac{h(r-x)}{r}.$$

La surface totale S du cylindre a pour expression

$$S=2\pi x^2+2\pi xy,$$

et, en remplaçant y par sa valeur,

$$(2) \qquad S=2\pi x\left[h+\frac{r-h}{r}x\right].$$

Il y plusieurs cas à considérer, suivant que le cône donné a une forme plus ou moins allongée. 1° Supposons d'abord la hauteur h du cône moindre que le rayon de la base, c'est-à-dire le cône très-aplati. La quantité $\frac{r-h}{r}$ étant positive, on voit que la surface augmente à mesure que x augmente ; si donc on fait croître x de o à r, la surface ira constamment en augmentant de o à $2\pi r^2$. Au commencement, quand $x=0$, le cylindre se réduit à la ligne droite OS et la surface est nulle ; à la fin, quand

$x = r$, la hauteur étant nulle, le cylindre coïncide la base du cône et la surface devient égale à $2\pi r^2$. I ces deux limites, la surface va continuellement en mentant, sans alternative de décroissance.

2° Supposons maintenant $h > r$, l'expression de la face deviendra

$$S = 2\pi x\left[h - \frac{h-r}{r}x\right],$$

ou

$$(3) \qquad S = 2\pi\frac{h-r}{r} \times x\left[\frac{hr}{h-r} - x\right].$$

Négligeant le facteur constant positif $2\pi\frac{h-r}{r}$, nous vons nous borner à considérer le produit

$$(4) \qquad x\left[\frac{hr}{h-r} - x\right]$$

des deux facteurs variables. La somme de ces deux fact est constante ; mais il ne faut pas en conclure imméd ment que le produit acquiert sa valeur maximum q les deux facteurs sont égaux entre eux ; il faut pour que ces deux facteurs puissent effectivement devenir é entre eux, ce qui n'a pas toujours lieu, comme nous a le voir. Par une transformation que nous avons déjà plusieurs fois, mettons le produit sous la forme

$$\frac{h^2r^2}{4(h-r)^2} - \left(\frac{hr}{2(h-r)} - x\right)^2.$$

Le rayon x de la base du cylindre n'est susceptible de v que de o à r. Si l'on a

$$\frac{hr}{2(h-r)} > r,$$

c'est-à-dire $h < 2r$, quand x croît de o à r, la quantité

$$\frac{hr}{2(h-r)} - x$$

reste positive et diminue sans devenir égale à zéro; la surface du cylindre va en augmentant continuellement depuis le commencement jusqu'à la fin, comme précédemment. Dans ce cas, les deux facteurs du produit ne deviennent pas égaux entre eux, ce qui exigerait que l'on eût $x = \frac{hr}{2(h-r)}$; la surface arrive à sa plus grande valeur quand $x = r$, c'est-à-dire quand les facteurs diffèrent le moins possible l'un de l'autre.

Supposons maintenant $\frac{hr}{2(h-r)} < r$, ou $h > 2r$; x variant de o à $\frac{hr}{2(h-r)}$, la surface augmente de o à $\frac{h^2r}{2(h-r)}$; x continuant à croître de $\frac{hr}{2(h-r)}$ à r, la surface diminue de cette valeur $\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$ jusqu'à la valeur extrême $2\pi r^2$. Ainsi la surface passe par un maximum pour $x = \frac{hr}{2(h-r)}$; dans ce cas, les deux facteurs du produit dont nous avons parlé deviennent égaux entre eux.

En résumé, si l'on fait croître x de o à r; 1° quand $h < 2r$, la surface du cylindre inscrit va en augmentant continuellement depuis le commencement jusqu'à la fin; 2° quand $h > 2r$, la surface augmente de zéro jusqu'à une certaine valeur maximum, puis diminue de ce maximum jusqu'à $2\pi r^2$.

168. Question VI. *Étudier la variation de la fraction*

$$\frac{2x^2+6}{x^2-6x+11},$$

dans laquelle x *désigne une variable réelle arbitraire.*

Proposons-nous d'abord de trouver les valeurs de x qui rendent cette fraction égale à une quantité donnée m. Nous

aurons l'équation

$$\frac{2x^2+6}{x^2-6x+11}=m,$$

ou
$$(m-2)x^2-6mx+11m-6=0,$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{3m\pm\sqrt{9m^2-(m-2)(11m-6)}}{m-1},$$

et, en simplifiant,

$$x=\frac{3m\pm\sqrt{-2m^2+28m-12}}{m-2}.$$

Pour que x soit réelle, il est nécessaire et il suffit que la quantité placée sous le radical soit positive. Ainsi la quantité m prendra toutes les valeurs qui rendent positif le trinôme

$$-2m^2+28m-12,$$

et n'en prendra pas d'autres. Ce trinôme peut être mis sous la forme

$$-2(m^2-14m+6).$$

L'équation

$$m^2-14m+6=0,$$

obtenue en égalant le trinôme à zéro, a ses racines réelles

$$m=7\pm\sqrt{43}.$$

Appelons m' la plus petite, m'' la plus grande ; le trinôme se décompose en facteurs du premier degré et s'écrit

$$-2(m-m')(m-m''),$$

ou
$$2(m-m')(m''-m).$$

Le trinôme est positif pour toutes les valeurs de m comprises entre m' et m'' ; et il est négatif pour toutes les autres valeurs. Ainsi, quand la variable x parcourt toute l'échelle des grandeurs, la fraction proposée m varie entre m' et m'', sans jamais sortir de ces limites.

La limite inférieure m' est un minimum, la limite supérieure m'' est un maximum.

Comme $\sqrt{43} = 6,557$ à 0,001 près, le minimum de la fraction est $m' = 0,443$, le maximum $m'' = 13,557$. La valeur de x qui rend la fraction minimum est

$$x' = \frac{3m'}{m' - 2} = -0,854;$$

celle qui la rend maximum est

$$x'' = \frac{3m''}{m'' - 2} = 3,519.$$

A toute valeur de m comprise entre m' et m'' correspondent deux valeurs différentes de x.

Nous pouvons maintenant nous rendre compte de la variation de la fraction proposée, quand x varie d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$. Examinons d'abord ce que devient cette fraction quand on donne à x une valeur numérique très-grande, positive ou négative. Pour cela, nous diviserons par x^2 le numérateur et le dénominateur, ce qui donne

$$m = \frac{2 + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{6}{x} + \frac{11}{x^2}};$$

quand x est très-grand numériquement, les quantités $\frac{6}{x^2}, \frac{6}{x}, \frac{11}{x^2}$ sont très-petites, et la fraction diffère très-peu de la valeur $\frac{2}{1}$ ou 2 ; ceci nous apprend que la fraction tend vers la valeur 2 quand x augmente indéfiniment en valeur absolue. Si donc on fait croître x d'une manière continue de $-\infty$ à $-0,854$, la fraction proposée ira en diminuant de la valeur 2 à la valeur minimum 0,443 ; x croissant en-

suite de 0,854, à 3,519 la fraction ira en croissant du minimum 0,443 au maximum 13,557; x dépassant enfin 3,519 et croissant indéfiniment, la fraction ira en diminuant du maximum 13,357 à la valeur 2. Il est à remarquer que la fraction passe deux fois par chaque valeur intermédiaire entre le minimum et le maximum. Il faut en excepter toutefois la valeur 2; la fraction ne passe pas précisément par la valeur 2; car cette valeur doit être considérée comme la valeur limite vers laquelle tend la fraction, quand x s'éloigne vers l'infini positif ou vers l'infini négatif.

169. QUESTION VII. *Étudier la variation de la fraction*

$$\frac{x^2+5}{6x-7}.$$

Si nous cherchons les valeurs de x qui rendent la fraction égale à m, nous avons l'équation

$$\frac{x^2+5}{6x-7}=m,$$

$$x^2-6mx+7m+5=0,$$

d'où

$$x=3m\pm\sqrt{9m^2-7m-5}.$$

La fraction m prendra toutes les valeurs qui rendent positif le trinôme

$$9m^2-7m-5.$$

Les deux racines de l'équation, obtenue en égalant ce trinôme à zéro, étant réelles, le trinôme se décompose en facteurs et se met sous la forme

$$9(m-m')(m-m''),$$

m' désignant toujours la plus petite racine $-0,452$, m'' la plus grande 1,230. Le trinôme est négatif pour les valeurs de m comprises entre m' et m''; mais il est positif pour toutes les valeurs de m plus grandes que m'' ou plus petites que m'.

Ainsi la fraction m admet deux séries de valeurs : l'une, commençant à m'' et s'élevant à $+\infty$; l'autre commençant à m' et descendant vers $-\infty$. La valeur m'' est le minimum de la première série, elle est donnée par $x = 3m'' = 3{,}690$, la valeur m' est le maximum de la seconde série, elle est donnée par $x = 3m' = -1{,}356$.

Remarquons que les mots maximum et minimum n'ont plus ici un sens absolu, mais seulement un sens relatif. La valeur m'' est la plus petite de toutes celles de la première série ; c'est un minimum relativement à cette première série ; mais elle est plus grande que les valeurs de la seconde série. De même, la valeur m' est la plus grande de toutes celles de la seconde série; c'est un maximum relativement à cette seconde série.

Ainsi, la fraction proposée varie de m'' à $+\infty$ et de m' à $-\infty$; elle parcourt toute l'échelle des grandeurs, sauf la portion comprise entre m' et m''. Il faut remarquer que la fraction saute brusquement de $-\infty$ à $+\infty$ quand x passe par la valeur $\frac{7}{6}$. En effet, quand x est un peu plus petit que $\frac{7}{6}$, la fraction est négative et très-grande en valeur absolue; dès que x dépasse un peu $\frac{7}{6}$, la fraction devient positive et très-grande.

Si l'on divise le numérateur et le dénominateur par x, ce qui met la fraction sous la forme

$$\frac{x+\frac{5}{x}}{6-\frac{7}{x}},$$

on voit que, pour de très-grandes valeurs de x, le numérateur différant très-peu de x le dénominateur de 6, la

fraction est à peu près égale à $\frac{x}{6}$. Elle a des valeurs très-grandes et de même signe que x.

Il résulte de tout ce qui précède que si l'on fait croître x de $-\infty$ à $-1,356$, la fraction va en croissant de $-\infty$ au maximum $-0,452$; x continuant à croître de $-1,356$ à $\frac{7}{6}$, la fraction va en décroissant de $-0,452$ à $-\infty$. Quand x passe par la valeur $\frac{7}{6}$, la fraction saute brusquement de $-\infty$ à $+\infty$; x croissant ensuite de $\frac{7}{6}$ à $3,690$, la fraction décroît de $+\infty$ au minimum $1,230$; x dépassant $3,690$ et croissant jusqu'à $+\infty$, la fraction va en croissant de $1,230$ à $+\infty$.

170. QUESTION VIII. *Étudier la variation de la fraction*

$$\frac{x^2-5}{2x-4}.$$

En égalant cette fraction à m et résolvant l'équation, on trouve

$$x=m\pm\sqrt{m^2-4m+5}.$$

Les deux racines du trinôme placé sous le radical étant imaginaires, ce trinôme peut se mettre sous la forme d'une somme de deux carrés

$$(m-2)^2+1;$$

il reste constamment positif, quelle que soit la valeur de m. Ainsi la fraction proposée parcourt toute l'échelle des grandeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

La fraction saute brusquement de $+\infty$ à $-\infty$ quand x passe par la valeur 2. D'autre part, si l'on divise le numé-

rateur et le dénominateur par x, elle s'écrit

$$\frac{x-\frac{5}{x}}{2-\frac{4}{x}},$$

et devient à peu près égale à $\frac{x}{2}$ pour de très-grandes valeurs de x positives ou négatives. On conclut de là que quand x varie de $-\infty$ à $+2$, la fraction va en augmentant de $-\infty$ à $+\infty$; x passant par la valeur 2, la fraction saute brusquement de $+\infty$ à $-\infty$; x variant ensuite de 2 à $+\infty$, la fraction croît de nouveau de $-\infty$ à $+\infty$, parcourant une seconde fois toute l'échelle des grandeurs.

D'après ce que nous avons dit, la fraction parcourt deux fois toute l'échelle des grandeurs; dans chacun de ces mouvements elle va en augmentant continuellement sans éprouver d'alternative de décroissance; autrement elle passerait plus de deux fois par leur même valeur; ce qui ne peut pas être, puisqu'à une même valeur de m ne correspondent que deux valeurs de x.

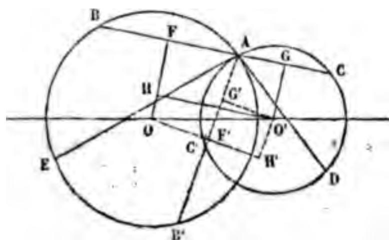
Les trois dernières questions que nous venons de traiter rentrent dans l'étude de la variation de la fraction rationnelle

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}.$$

Les exemples que nous avons examinés montrent les circonstances principales qui peuvent se présenter; il est inutile d'entrer dans plus de détails.

171. Question IX. *Étant donnés deux cercles qui se coupent au point* A; *par ce point on mène une sécante quelconque* BC; *étudier la variation du produit des deux portions* AB *et* AC *de cette sécante.*

Étudions d'abord sur la figure la variation du p
$AB \times AC$. Faisons tourner la sécante autour du poin
droite à gauche ; s
partons de la p
AD où elle est tai
au grand cercle, l
ment AB est nul
que le produit ;
nous arrivons à l
sition AE où el



tangente au petit cercle, le segment AC s'annulai
produit redevient nul ; dans l'intervalle le produit a
passé par un maximum. Si nous continuons le mouv
dans le même sens pour aller de la position AE à la
tion AD, le produit, partant de zéro pour revenir à
passe par un second maximum.

Supposons que la sécante occupe la position BC
centres O et O', abaissons sur cette sécante les perpe
laires OF, O'G ; et du centre O', menons une parallè
à la sécante. Appelons a et b les rayons OA, O'A de
cercles, d la distance OO' des centres, x et y les moiti
AG des deux segments de la sécante, $4m$ le produit
deux segments. On a la première équation

$$(1) \qquad xy = m.$$

Le triangle rectangle OO'H donne

$$d^2 = \overline{O'H}^2 + \overline{OH}^2 = (x+y)^2 + (OF - O'G)^2;$$

si l'on développe les carrés et si l'on observe que

$$\overline{OF}^2 = a^2 - x^2,$$
$$\overline{O'G}^2 = b^2 - y^2,$$

il vient

$$d^2 = a + b^2 + 2m - 2\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)},$$

d'où

$$\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)} = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2} + m = \mathrm{A} + m,$$

en désignant, pour abréger, par A la quantité connue $\frac{a^2 + b^2 - d^2}{2}$. En élevant au carré et développant, on a

$$a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2 + x^2y^2 = (\mathrm{A} + m)^2,$$

ou

$$(2) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 + m^2 - (\mathrm{A} + m)^2.$$

Les deux équations (1) et (2) conviennent aussi au cas où la sécante occupe la position AB'; seulement, dans ce cas, le segment AC', étant porté en sens contraire, sera regardé comme négatif, ainsi que le produit m. Dans le triangle rectangle OO'H', le côté O'H' est égal à la différence AF' — AG', ou à la somme algébrique $x + y$; le côté OH' est une somme OF' + O'G, au lieu d'être une différence comme précédemment; le signe placé devant le radical est donc changé, mais l'élévation au carré donne la même équation (2). Puisque, dans cette nouvelle position de la sécante, le produit m est regardé comme négatif, on voit que le second maximum géométrique correspond à un minimum algébrique. Ainsi le produit m variera entre un minimum négatif et un maximum positif.

Afin de rendre l'équation (2) symétrique par rapport aux deux inconnues, nous changerons les inconnues et nous poserons

$$bx = x', \qquad ay = y',$$

prenant pour inconnues nouvelles x' et y'; les équations (1) et (2) deviennent ainsi

$$(3) \qquad x'y' = abm,$$

$$(4) \qquad x'^2 + y'^2 = a^2b^2 + m^2 - (\mathrm{A} + m)^2.$$

On connaît le produit des deux inconnues et la somme de leurs carrés. Si, à la seconde équation, on ajoute la première multipliée par 2, il vient

$$(x'+y')^2=(ab+m)^2-(A+m)^2,$$

d'où

$$x'+y'=\pm\sqrt{(ab-A)(ab+A+2m)}.$$

De même, si de la seconde équation on retranche la première multipliée par 2, il vient

$$(x'-y')^2=(ab-m)^2-(A+m)^2,$$

d'où

$$x'-y'=\pm\sqrt{(ab+A)(ab-A-2m)}.$$

Si l'on remplace A par sa valeur, les deux expressions précédentes deviennent

$$(5)\quad x'+y'=\pm\frac{1}{2}\sqrt{[d^2-(a-b)^2][(a+b)^2-d^2+4m]}.$$

$$(6)\quad x'-y'=\pm\frac{1}{2}\sqrt{[(a+b)^2-d^2][d^2-(a-b)^2-4m]}.$$

Pour que la question soit possible, il est nécessaire et il suffit que les deux radicaux soient réels. Nous remarquons d'abord que, puisque la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence, les deux quantités

$$(a+b)^2-d^2,$$
$$d^2-(a-b)^2,$$

sont positives; en représentant, pour abréger, par p et q ces deux quantités positives, on a

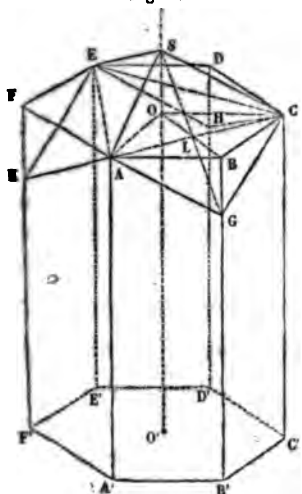
$$x'+y'=\pm\frac{1}{2}\sqrt{q(p+4m)},$$

$$x'-y'=\pm\frac{1}{2}\sqrt{p(q-4m)}.$$

Le premier radical est réel, si $4m$ est plus grand que $-p$, le second, si $4m$ est plus petit que q. Donc le produit des deux segments de la sécante varie du minimum $-p$ au maximum $+q$.

Si l'on fait $4m=q$, on a $x'-y'=0$, et par suite $bx=ay$, ou $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$; les deux segments AB et AC étant proportionnels aux rayons, les deux triangles OAB, O'AC sont semblables, les rayons OA, O'C sont parallèles, et par conséquent la sécante passe par le centre de similitude externe des deux cercles. De même, si l'on fait $4m=-p$, on a $x'+y'=0$; la sécante AB' passe par le centre de similitude interne. Ainsi le produit acquiert son premier maximum quand la sécante passe par le centre de similitude externe; il acquiert son second maximum numérique quand la sécante passe par le centre de similitude interne.

Fig. 1.



172. QUESTION X. *Alvéoles des abeilles.* Étant donné un prisme droit ayant pour base un hexagone régulier, prenons sur le prolongement de l'axe O'O du prisme (*fig.* 1) un point arbitraire S; par ce point et les trois côtés du triangle équilatéral ACE, obtenu en joignant deux à deux les sommets de la base supérieure, menons trois plans; ces plans détachent du prisme hexagonal trois tétraèdres BACG, DCEH, FAEK, et les remplacent par le tétraèdre SACE placé au-dessus du prisme; nous formons ainsi le solide

représenté par la figure 2, qui se termine à sa partie supé rieure par une sorte d'hexagone gauche, réunion des trois lo sanges qui aboutissent au som met S.

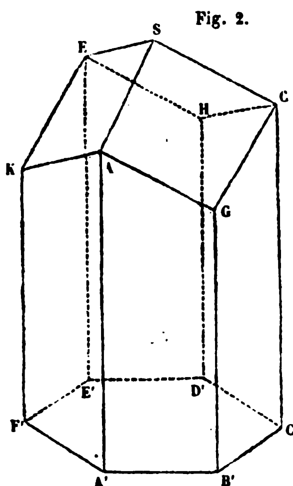


Fig. 2.

Il est aisé de voir que le vo lume du solide ainsi formé es constant, quelle que soit la po sition du point S sur le prolon gement de l'axe du prisme. E effet, les deux losanges SAG et OABC (*fig.* 1) ayant un diagonale commune AC, le deux autres diagonales S et OB passent par le mêm point L, milieu de AC ; les t angles rectangles LBG, LO sont égaux, et l'on a BG = OS. Il en résulte que le tétra dre GABC détaché du prisme, et le tétraèdre ajouté SAC sont égaux, comme ayant leurs bases égales ABC, AO et aussi leurs hauteurs égales BG et OS. Ainsi la som des trois parties détachées du prisme est égale à la pyr mide ajoutée SACE.

Considérons maintenant la surface du solide. Appel a le côté A'B' de l'hexagone régulier, l la longueur l'arête AA' du prisme primitif, x la distance arbitraire C La surface latérale du solide que nous étudions, se com sant de six trapèzes tels que AA'B'G, a pour mesure

$$3(AA' + GB') \times A'B' = 3a(2l - x).$$

Les trois losanges qui terminent le solide ont pour mesure

$$\frac{3AC \times SG}{2} = 3AC \times SL = 3a\sqrt{3}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Ainsi la surface totale du solide, abstraction faite de la base inférieure, a pour expression

$$3a(2l-x)+3a\sqrt{3}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Cherchons la valeur de x pour laquelle cette surface est égale à une surface donnée que, pour simplifier, nous représenterons par $3am$; nous avons l'équation

$$2l-x+\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}=m.$$

ou

(1) $$\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}=m-2l+x,$$

et, en élevant au carré,

$$3x^2+\frac{3a^2}{4}=(m-2l)^2+2(m-2l)x+x^2,$$

(2) $$2x^2-2(m-2l)x+\frac{3a^2}{4}-(m-2l)^2=0.$$

On en déduit

(3) $$x=\frac{m-2l\pm\sqrt{3\left[(m-2l)^2-\frac{a^2}{2}\right]}}{2}.$$

A l'inspection de l'équation (1), on voit que, le premier membre étant plus grand que x, la quantité $m-2l$ est nécessairement positive. Si l'on représente cette quantité par m', la formule (3) devient

$$x=\frac{m'\pm\sqrt{3\left(m'^2-\frac{a^2}{2}\right)}}{2}.$$

Pour que x soit réelle, la quantité positive m' doit satisfaire à la condition

$$m'^2>\frac{a^2}{2},$$

ou

$$m' > \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi la surface a un *minimum*; et ce minimum a lieu

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Les abeilles construisent leurs cellules sur ce L'entrée de l'alvéole est un hexagone régulier A'B'((fig. 2); le fond est formé de la réunion de trois f planes inclinées de manière que la surface soit min Il y a ainsi économie de cire. Les alvéoles sont plac unes à côté des autres en doubles rayons, les ouve tournées en dehors, et les fonds se touchant exact de manière qu'il n'y ait pas d'intervalle vide entre e que chaque cloison serve à deux cellules voisines.

173. QUESTION XI. *Partager un nombre donné e sieurs parties de manière que le produit de ces parti maximum.*

Pour fixer les idées, supposons que l'on part nombre donné a en trois parties x, y, z, dont chacun varier de o à a. Il est aisé de reconnaître que le p xyz acquiert sa plus grande valeur quand les trois fa

sont égaux entre eux, c'est-à-dire quand $x = y =$

En effet, supposons que deux des facteurs, par ex x et y, diffèrent; fixons le troisième facteur z, et f varier les deux premiers facteurs x et y, dont la s $a - z$ est alors constante, de manière à les rendre entre eux; il est clair que nous augmenterons le prod et par suite le produit xyz; ainsi, tant que deux fa diffèrent, on peut les modifier de manière à augmen valeur du produit; le produit n'arrive donc à sa

maximum que lorsque les trois facteurs sont égaux entre eux.

Application. L'aire d'un triangle est exprimée par la formule

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

dans laquelle a, b, c désignent les trois côtés et $2p$ le périmètre. Si l'on fait varier les côtés de manière que le périmètre reste constant, la somme des trois facteurs variables $p-a, p-b, p-c$, restant constamment égale à p, leur produit sera maximum quand ces trois facteurs seront égaux entre eux, c'est-à-dire quand $a=b=c$. Ainsi, *de tous les triangles ayant même périmètre, le plus grand est le triangle équilatéral.*

174. Remarque. Dans la question précédente, nous avons supposé que les facteurs variables et positifs ne sont assujettis qu'à la condition

$$x+y+z+\ldots\ldots=a$$

d'avoir une somme constante ; chacun des facteurs varie de o à a et on peut les prendre tous arbitrairement excepté un. Dans ce cas, nous avons vu que le produit est maximum, quand tous les facteurs sont égaux. La même propriété subsiste quand, outre la condition d'avoir une somme constante, les facteurs variables sont assujettis à vérifier d'autres relations, pourvu, toutefois, que les nouvelles relations permettent de rendre tous les facteurs égaux entre eux. Pour fixer les idées, bornons-nous au cas de trois facteurs, et supposons que ces trois facteurs positifs soient assujettis à vérifier les deux conditions

$$(1)\qquad x+y+z=a,$$
$$(2)\qquad x+2y+3z=b.$$

Imaginons d'abord que l'on fasse abstraction de la rela-

tion (2) et que l'on donne aux trois facteurs x, y, z tous les systèmes de valeurs positives qui vérifient la relation (1); la plus grande valeur du produit xyz sera la valeur $\frac{a^3}{27}$, qui a lieu quand on fait $x = y = z = \frac{a}{3}$. Si, maintenant, on tient compte de la relation (2), il faudra, parmi les systèmes de valeurs de x, y, z, qui vérifient la relation (1), prendre seulement ceux qui vérifient en même temps la relation (2); le produit xyz ne passera plus par toute la série des valeurs qu'il avait précédemment, mais seulement par une partie d'entre elles; il est évident que le maximum de la série partielle ne pourra dans aucun cas surpasser le maximum de la série totale considérée précédemment; le plus souvent même il sera moindre. Si les trois facteurs peuvent devenir égaux entre eux, ce qui a lieu quand $b = 2a$, le produit acquerra la valeur maximum $\frac{a^3}{27}$; mais si b diffère de $2a$, les trois facteurs ne pouvant être rendus égaux entre eux, le produit n'atteindra pas la valeur $\frac{a^3}{27}$; son maximum sera plus petit que $\frac{a^3}{27}$; dans ce cas, pour déterminer le maximum, il faut recourir à une autre méthode qui sera exposée dans le Cours de mathématiques spéciales.

175. QUESTION XII. *Partager le nombre* a *en deux parties* x *et* y *telles que le produit* $x^m y^n$ *soit maximum.*

Nous pouvons écrire ce produit sous la forme

$$x^m y^n = m^m n^n \frac{x^m}{m^m} \times \frac{y^n}{n^n}.$$

Faisons abstraction du facteur constant $m^m n^n$, et considérons seulement l'expression variable

$$\frac{x^m}{m^m} \times \frac{y^n}{n^n},$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m} \cdot \ldots\ldots \times \frac{y}{n} \cdot \frac{y}{n} \cdot \ldots\ldots$$

C'est le produit de $m + n$ facteurs, dont m sont égaux à $\frac{x}{m}$, et n à $\frac{y}{n}$; la somme de tous ces facteurs

$$m\frac{x}{m} + n\frac{y}{n}$$

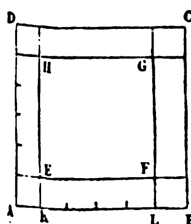
est constante, puisque $x + y = a$; d'ailleurs tous ces facteurs peuvent être rendus égaux entre eux; donc le produit acquerra sa valeur maximum quand tous les facteurs seront égaux entre eux, c'est-à-dire quand on aura

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n}.$$

Ainsi il faut partager le nombre a en deux parties proportionnelles aux deux exposants m et n.

176. *Applications.* 1° Étant donné une feuillè de carton carrée ABCD, si, après avoir mené des parallèles aux quatre côtés à la même distance, on enlève les petits carrés dans les angles et qu'on relève les portions rectangulaires telles que EKLF, on forme une boîte à fond carré EFGH. Appelons $2a$ le côté AB de la feuille de carton et x la distance AK à laquelle on trace les parallèles; la boîte a pour base un carré dont le côté EF est $2a - 2x$ ou $2(a - x)$; sa hauteur est x; le volume a pour expression

Fig. 3.



$$4(a - x)^2 x.$$

Quand x varie de o a a, le volume, qui est nul pour $x = o$, augmente d'abord, pour diminuer ensuite et redevenir nul; il passe donc par un maximum ; la somme des deux facteurs variables $a - x$ et x étant constante, ce maximum aura lieu quand ces deux facteurs seront proportionnels aux exposants 2 et 1, c'est-à-dire quand on aura

$$\frac{a-x}{2} = \frac{x}{1},$$

d'où

$$x = \frac{a}{3}.$$

Ainsi, pour obtenir la boîte la plus grande, il faut partager le côté AB en six parties égales et mener les parallèles par les premiers points de division.

2° *Quel est le plus grand des cylindres inscrits dans une sphère?* Si l'on appelle r le rayon de la sphère, x le rayon de la base du cylindre, $2y$ sa hauteur on a entre ces deux variables la relation

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

et le volume du cylindre est exprimé par

$$2\pi x^2 y.$$

Cherchons le maximum du produit x^2y, ou, ce qui est la même chose, de son carré

$$x^4y^2.$$

Les deux facteurs x^2 et y^2, dont la somme est constante, sont ici élevés, le premier à la puissance 2, le second à la puissance 1 ; donc le produit sera maximum quand ces facteurs seront proportionnels aux exposants, c'est-à-dire quand on aura

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{1}.$$

On en déduit $y = \frac{r}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. La hauteur du cylindre maximum est moindre que le diamètre de la base; elle est égale aux deux tiers du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de base.

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES AU SECOND DEGRÉ.

Équations bicarrées.

177. On nomme équations bicarrées, des équations du quatrième degré qui ne renferment que les puissances paires de l'inconnue. La forme générale de l'équation bicarrée est

$$(1) \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Si l'on pose $x^2 = y$, prenant pour inconnue nouvelle y, l'équation se ramène à l'équation du second degré

$$(2) \qquad ay^2 + by + c = 0.$$

On en déduit

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Mais, comme $x = \pm \sqrt{y}$, on a finalement

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Chacune des valeurs de y donne pour x deux valeurs égales et de signes contraires. Ainsi l'équation bicarrée admet quatre racines, égales deux à deux et de signes contraires.

Si l'équation (2) a ses deux racines réelles et positives, l'équation bicarrée a ses quatre racines réelles. Si l'une

des racines de l'équation (2) est positive, l'autre négative, l'équation (1) admet deux racines réelles et deux imaginaires. Si les deux racines de l'équation (2) sont négatives ou imaginaires, les quatre racines de l'équation (1) sont imaginaires.

Exercices.

178. QUESTION I. Résoudre les deux équations

$$xy = 6,$$
$$y^2 - x^2 = 5.$$

En tirant de la première

$$y = \frac{6}{x},$$

et substituant dans la seconde, on arrive à l'équation du quatrième degré bicarrée

$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x = \pm\sqrt{\frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{-5 \pm 13}{2}}.$$

Les deux valeurs de x^2 sont réelles, l'une positive 4, l'autre négative -9; la valeur positive donne pour x deux racines réelles

$$x = \pm 2, \quad \text{d'où} \quad y = \pm 3;$$

la valeur négative donne deux racines imaginaires

$$x = \pm 3i, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{6}{\pm 3i} = \mp 2i.$$

179. QUESTION II. *Dans une sphère donnée, inscrire un cylindre ayant une surface totale donnée.*

Appelons r le rayon de la sphère, x le rayon de la base

du cylindre, $2y$ sa hauteur, et représentons la surface totale par $2\pi m$. Nous aurons les deux équations

$$(1)\qquad x^2+y^2=r^2,$$
$$(2)\qquad 2\pi x^2+4\pi xy=2\pi m.$$

Si, dans la première équation, on substitue la valeur

$$(3)\qquad y=\frac{m-x^2}{2x},$$

tirée de la seconde, on arrive à l'équation bicarrée

$$(4)\qquad 5x^4-2(m+2r^2)x^2+m^2=0,$$

d'où l'on déduit

$$(5)\qquad x=\sqrt{\frac{(m+2r^2)\pm\sqrt{(m+2r^2)^2-5m^2}}{5}}.$$

La valeur de x devant être positive, il est inutile d'écrire le signe $\pm$ devant le grand radical.

Pour que x soit réelle, il est nécessaire que la quantité placée sous le petit radical soit positive, c'est-à-dire que l'on ait

$$(m+2r^2)^2>5m^2,$$

ou

$$m+2r^2>m\sqrt{5}.$$

Il en résulte la condition

$$m<\frac{2r^2}{\sqrt{5}-1},$$

ou

$$m<\frac{r^2(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

Si cette condition est remplie, les deux racines de l'équation (4) du second degré en x^2 étant réelles et positives, la formule (5) donne pour x deux valeurs réelles et positives.

Appelons-les x' et x'',

$$x' = \sqrt{\frac{(m+2r^2) - \sqrt{(m+2r^2)^2 - 5m^2}}{5}},$$

$$x'' = \sqrt{\frac{(m+2r^2) + \sqrt{(m+2r^2)^2 - 5m^2}}{5}}.$$

Si l'on substitue chacune de ces valeurs dans l'équation (3), on aura pour y deux valeurs correspondantes y' et y''. Mais la valeur de y doit aussi être positive ; il faut donc que l'on ait

$$x^2 < m.$$

Cette condition est toujours remplie pour la première racine x' ; car on a

$$x'^2 = \frac{m + 2r^2 - \sqrt{(m+2r^2)^2 - 5m^2}}{5},$$

et, en transformant,

$$x'^2 = \frac{m^2}{m + 2r^2 + \sqrt{(m+2r^2)^2 - 5m^2}}.$$

Le dénominateur étant plus grand que m, la fraction est plus petite que m.

Quand on remplace x^2 par m, le premier membre de l'équation (4) devient égal à $4m(m - r^2)$. Mais ce trinôme peut être mis sous la forme

$$5(x^2 - x'^2)(x^2 - x''^2) ;$$

on a donc

$$5(m - x'^2)(m - x''^2) = 4m(m - r^2).$$

Puisque x'^2 est plus petit que m, le premier facteur est positif, et les deux différences $m - x''^2$ et $m - r^2$ ont le même signe. Si $m > r^2$, on aura $x''^2 < m$, et la seconde racine x'', donnant aussi pour y une valeur positive, sera admissible. Mais si $m < r^2$, on aura $x''^2 > m$, et la seconde racine devra être rejetée.

En résumé, pour que le problème soit possible, il faut que la surface totale du cylindre soit plus petite que $\pi r^2(\sqrt{5}+1)$. Si cette surface est plus petite que $2\pi r^2$, le problème admet deux solutions ; si la surface est plus grande que $2\pi r^2$, tout en étant moindre que le maximum, le problème n'admet qu'une solution.

On voit par là que lorsqu'on fait varier le rayon x du cylindre de o à r, la surface augmente de o au maximum $\pi r^2(\sqrt{5}+1)$, pour diminuer ensuite de ce maximum à $2\pi r^2$.

* *Transformation des expressions de la forme* $\sqrt{\pm a\sqrt{b}}$.

180. Les quantités irrationnelles de cette forme proviennent, comme nous l'avons vu, des équations bicarrées; il est possible quelquefois de les transformer en une somme ou en une différence de deux radicaux simples, et ceci offre un certain avantage en rendant le calcul plus simple et plus facile. Mais nous allons d'abord établir un principe qui nous servira.

Lorsque deux quantités INCOMMENSURABLES *de la forme* $a\pm\sqrt{b}$, *les lettres* a *et* b *désignant deux quantités commensurables, sont égales, les parties commensurables sont égales, ainsi que les parties incommensurables.* Je dis par exemple, que l'égalité

$$a+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'},$$

dans laquelle les lettres a et a' désignent des quantités commensurables quelconques, b et b' des quantités commensurables non carrés parfaits, ne peut avoir lieu que si l'on a séparément $a=a'$, $b=b'$. En effet, de l'égalité précédente, on déduit

$$\sqrt{b}=(a'-a)+\sqrt{b'},$$

et, en élevant au carré les deux membres,

$$b=(a'-a)^2+b'+2(a'-a)\sqrt{b'};$$

si a était différent de a', on aurait

$$\sqrt{b'} = \frac{b - b' - (a' - a)^2}{2(a' - a)},$$

et la quantité incommensurable $\sqrt{b'}$ serait égale à une quantité commensurable, ce qui est impossible, puisque $a = a'$, on a aussi $b = b'$.

Proposons-nous maintenant de transformer l'expression $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, dans laquelle a et b désignent des nombres positifs commensurables, en une somme de deux radicaux simples. Posons donc

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Nous voulons que les deux nombres cherchés x et y soient commensurables. En élevant les deux membres au carré, on a

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}.$$

En vertu du principe précédemment établi, cette égalité ne peut avoir lieu que si l'on a séparément

$$x + y = a,$$
$$4xy = b.$$

Nous connaissons la somme et le produit des deux inconnues; ces deux inconnues sont donc les racines de l'équation du second degré

$$u^2 - au + \frac{b}{4} = 0,$$

d'où

$$u = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b}}{2}.$$

On voit que les nombres cherchés seront commensurables lorsque la quantité $a^2 - b$ sera un carré parfait. En désignant par k^2 ce carré parfait, on aura ainsi

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+k}{2}}+\sqrt{\frac{a-k}{2}}.$$

181. La transformation de l'expression $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ fectuera de la même manière. On posera

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y};$$

d'où l'on déduit

$$a-\sqrt{b}=x+y-2\sqrt{xy},$$

et par suite

$$x+y=a,$$
$$4xy=b.$$

Les valeurs de x et de y sont donc les mêmes que p demment. La transformation sera possible si la qu a^2-b est un carré parfait. En désignant par k^2 ce c on aura

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+k}{2}}-\sqrt{\frac{a-k}{2}}.$$

Applications. 1° Transformer l'expression $\sqrt{7+}$ La quantité 7^2-13 ou 36 étant égale au carré de transformation est possible et l'on aura

$$\sqrt{7+\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{7+6}{2}}+\sqrt{\frac{7-6}{2}}=\sqrt{\frac{13}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{26}\cdot}{2}$$

2° Transformer l'expression $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$. On la m sous la forme $\sqrt{6-\sqrt{20}}$, en faisant passer le facte sous le radical.

La quantité 6^2-20 ou 16 étant égale au carré de transformation est possible et l'on aura

$$\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{\frac{6+4}{2}}-\sqrt{\frac{6-4}{2}}=\sqrt{5}-1.$$

* *Équations trinômes.*

182. Considérons une équation de la forme

$$(1)\qquad ax^{2m} + ax^{m} + c = 0.$$

En posant $x^m = y$, on est ramené à l'équation du second degré

$$(2)\qquad ay^2 + ay + c = 0.$$

Une fois les valeurs de y connues, on obtient celles de x par la formule

$$(3)\qquad x = \sqrt[m]{y}.$$

Il y a plusieurs cas à examiner :

1° Si m est pair, toute valeur réelle positive de y donne pour x deux valeurs réelles, égales et de signes contraires. Mais une valeur négative de y ne donne pour x que des valeurs imaginaires; car les puissances paires des quantités réelles, positives ou négatives, sont toujours positives. C'est ce que nous avons vu dans la résolution des équations bicarrées.

2° Si m est impair, toute valeur réelle de y donne pour x une valeur réelle de même signe et une seule. Soit, par exemple, l'équation

$$x^6 - 19x^3 - 216 = 0;$$

l'équation du second degré

$$y^2 - 19y - 216 = 0,$$

obtenue en posant $x^3 = y$, a pour racines -8 et $+27$; l'équation proposée admet les deux racines réelles -2 et $+3$.

Outre les racines réelles dont nous venons de parler, l'équation admet encore des racines imaginaires dont il sera question plus tard.

EXERCICES SUR LE LIVRE III.

QUESTION I. Trouver le point également éclairé par d
lumières sur la droite qui les joint.

QUESTION II. Partager un trapèze en deux parties équ
lentes par une droite parallèle aux deux bases.

QUESTION III. Dans un cercle inscrire un rectangle ay
une aire donnée. = Maximum de ce rectangle.

Réponse : Le rectangle maximum est le carré.

QUESTION IV. Trouver les côtés d'un triangle rectan
connaissant le périmètre et la surface.

QUESTION V. Trouver les côtés d'un triangle rectang
connaissant l'hypoténuse et la somme obtenue en ajout
la hauteur aux deux côtés de l'angle droit.

QUESTION VI. Trouver les côtés d'un triangle rectang
connaissant la hauteur et la somme des côtés de l'angle dro

QUESTION VII. Trouver les côtés d'un triangle rectang
connaissant le périmètre et la somme de l'hypoténuse
de la hauteur.

QUESTION VIII. Couper une sphère par un plan, de te
sorte que le segment détaché ait un volume égal au cô
ayant pour sommet le centre de la sphère et pour base
section faite dans la sphère par le plan.

Réponse : On mènera le plan sécant à une distance
centre égale au plus grand segment du rayon partagé
moyenne et extrême raison.

QUESTION IX. Dans un cône droit, inscrire un cylin
ayant une surface latérale donnée. = Maximum de ce
surface.

Réponse : La surface latérale est maximum quand la h
teur du cylindre est moitié de celle du cône.

QUESTION X. Dans un demi-cercle inscrire un trapèze de périmètre donné. = Maximum de ce périmètre.

QUESTION XI. Circonscrire à une sphère un cône dont la base repose sur un plan diamétral et qui ait une surface donnée. = Minimum de cette surface.

Réponse : Le cône dont la surface totale est minimum est celui qui a pour section un triangle équilatéral. Cette surface minimum égale celle de la sphère.

QUESTION XII. Un cercle étant inscrit dans un angle droit, mener à ce cercle une tangente telle que le triangle ainsi formé ait une surface donnée. = Minimum et maximum de cette surface.

QUESTION XIII. Par un point donné dans l'intérieur d'un cercle, mener deux cordes rectangulaires telles qu'en joignant leurs extrémités on forme un quadrilatère ayant une aire donnée.

QUESTION XIV. Avec un levier pesant de seconde espèce, on veut soulever un poids donné appliqué à un point donné. Quelle longueur faut-il donner au levier pour que la puissance soit minimum, en tenant compte du poids de levier?

QUESTION XV. Cône maximum inscrit dans une sphère.

QUESTION XVI. Triangle isocèle maximum inscrit dans un cercle.

QUESTION XVII. Déterminer les dimensions d'un cône ayant un volume et une surface donnés.

QUESTION XVIII. Dans un manomètre à air, on suppose que les deux sommets de la colonne de mercure sont au même niveau quand la vapeur a une tension égale à une atmosphère. Déterminer la position du sommet de la colonne de mercure quand la vapeur aura une tension donnée.

QUESTION XIX. On commence à faire mouvoir le p
d'une pompe aspirante. Trouver à quelle hauteur s'él
l'eau dans le tuyau d'aspiration, après le premier, le se
le troisième... coup de piston.

Application numérique. La section du corps de pompe
0,01 mètre carré, celle du tuyau d'aspiration de 0,002 ; la
du piston de $0^m,4$, la longueur du tuyau d'aspiration de 8 m
On représentera la pression atmosphérique par une colon
$1,^m.330$.

On trouvera pour l'élévation de l'eau, après chaque co
piston :

	mètres.	mètres.
1er coup	1,07	1,07
2e	1,08	2,16
3e	1,09	3,25
4e	1,11	4,36
5e	1,14	5,50
6e	1,18	6,68
7e	1,29	7,97

La pompe fonctionnera après le huitième coup de piston.

LIVRE IV.

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES.

CHAPITRE PREMIER.

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

Définition.

183. On appelle *progression arithmétique* une suite de quantités telles que la différence entre deux quantités consécutives est constante. Ces diverses quantités sont les *termes* de la progression. L'excès d'un terme quelconque sur le précédent se nomme *raison* de la progression.

La progression est *croissante* lorsque ces termes vont en augmentant. Dans ce cas, la raison est positive. Ainsi la progression croissante

$$\div 2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \,.\, 17 \,.\, 20$$

a pour raison $+ 3$.

Au contraire la progression est *décroissante* lorsque ses termes vont en diminuant. Dans ce cas, la raison est négative. Ainsi la progression décroissante

$$\div 20 \,.\, 17 \,.\, 14 \,.\, 11 \,.\, 8 \,.\, 5 \,.\, 2.$$

a pour raison $- 3$.

THÉORÈME I.

184. *Dans une progression arithmétique, un terme de rang quelconque égale le premier plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

Appelons a, b, c, d,........ les différents termes de la progression; r la raison. D'après la définition même de la progression, le second terme égale le premier, plus la raison,

$$b = a + r.$$

Le troisième terme égale le second plus la raison, et par conséquent le premier plus deux fois la raison,

$$c = b + r = a + r + r = a + 2r.$$

Le quatrième terme égale le troisième plus la raison, et par conséquent le premier plus trois fois la raison,

$$d = c + r = a + 2r + r = a + 3r,$$

et ainsi de suite. En général le terme qui occupe le n^e rang et qui par conséquent en a $n - 1$ avant lui, égale

$$a + (n - 1)r.$$

Ainsi la progression arithmétique peut être mise sous la forme

$$\div a \,.\, a + r \,.\, a + 2r \,.\, a + 3r \,.....$$

185. Remarque. Les termes d'une progression arithmétique croissante augmentent indéfiniment de manière à devenir plus grands que toute quantité donnée. En effet, le terme de rang n sera plus grand que la quantité donnée A, si l'on a

$$a + (n - 1)r > A,$$

ou

$$(n - 1)r > A - a,$$

et, en divisant par le nombre positif r,

$$n - 1 > \frac{A - a}{r},$$

$$n > \frac{A - a}{r} + 1.$$

Ainsi, dès que le rang surpasse la quantité $\frac{A - a}{r} + 1$, le terme surpasse la quantité A, si grande qu'elle soit.

Considérons, par exemple, la progression croissante indéfinie

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 \ldots..$$

Pour avoir un terme plus grand que 1000, on prendra

$$n > \frac{1000 - 2}{3} + 1,$$

c'est-à-dire

$$n > 333 + \frac{2}{3}.$$

Le 334ᵉ terme est plus grand que 1000.

186. *Insérer entre deux quantités données un certain nombre de moyens arithmétiques.* On appelle moyens arithmétiques, insérés entre deux quantités données, des quantités qui forment une progression arithmétique dont les deux quantités données sont les deux extrêmes. La question revient à trouver la raison de la progression.

Soit insérer n moyens arithmétiques entre les deux quantités a et b. Le terme b de la progression égale le premier terme a, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui, c'est-à-dire plus $n + 1$ fois la raison. On a donc

$$b = a + (n + 1)r,$$

d'où l'on déduit

$$r = \frac{b - a}{n + 1}.$$

Ainsi *on obtient la raison de la progression, en divisant* *différence des deux quantités données par le nombre* *moyens à insérer plus un.*

Si, par exemple, on veut insérer 5 moyens entre les de nombres 2 et 20, on prendra

$$r = \frac{20 - 2}{5 + 1} = 3,$$

et l'on formera la progression

$$\div 2.5.8.11.14.17.20.$$

Théorème II.

187. *Si, entre deux termes consécutifs d'une progressi* *arithmétique, on insère le même nombre de moyens, les pr* *gressions partielles ainsi obtenues forment une seule et mê* *progression.*

En effet, puisqu'on insère le même nombre de moye entre deux termes consécutifs et que la différence de c deux termes est constante, la raison est la même da toutes les progressions partielles; et comme le derni terme de chacune d'elles est le premier de la suivante, c progréssions partielles se continuent de manière à ne form qu'une seule et même progression.

Theorème III.

188. *Dans toute progression arithmétique, la somme* *deux termes également distants des extrêmes est constan*

Soit la progression

$$\div a.b.c \ldots\ldots\ldots h.k.l.$$

Je considère le second terme et l'avant-dernier; le s cond terme égale le premier plus la raison,

$$b = a + r;$$

l'avant-dernier égale le dernier, moins la raison,

$$k = l - r.$$

En ajoutant ces deux égalités membre à membre, on a

$$b + k = a + l.$$

On a de même, en considérant les termes c et h,

$$c = b + r,$$
$$h = k - r;$$

d'où l'on déduit

$$c + h = b + k.$$

Et ainsi de suite.

Lorsque la progression contient un nombre impair de termes, il y a au milieu un terme également distant des deux extrêmes. Deux fois ce terme égale la somme des extrêmes.

Ainsi dans la progression

$$\div 2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \,.\, 17 \,.\, 20.$$

les termes 2 et 20, 5 et 17, 8 et 14, donnent la même somme 22, qui est égale à deux fois le terme du milieu 11.

Théorème IV.

189. *La somme des termes d'une progression arithmétique égale la moitié du produit obtenu en multipliant la somme des extrêmes par le nombre des termes.*

Soit toujours la progression

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,\ldots\ldots\ldots\, h \,.\, k \,.\, l.$$

Appelons n le nombre des termes, s la somme des termes, et écrivons cette somme au-dessous d'elle-même en ordre inverse,

$$s = a + b + c \ldots\ldots + h + k + l,$$
$$s = l + k + h \ldots\ldots + c + b + a.$$

On voit que les deux termes placés l'un au-dessous de l'autre sont également distants des extrêmes dans la progression et que par conséquent leur somme est constante et égale à la somme des extrêmes $a + l$. Si donc on ajoute les deux sommes terme à terme, la somme totale $2s$ se composera de la somme des extrêmes répétée autant de fois qu'il y a de termes dans la progression. On aura ainsi

$$2s = (a + l)n,$$

d'où

$$(1) \qquad s = \frac{(a+l)n}{2}.$$

Par exemple, la somme des termes de la progression

$$2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \,.\, 17 \,.\, 20$$

est 77.

Si l'on remplace le dernier terme l par sa valeur

$$l = a + (n-1)r,$$

on obtient cette autre formule

$$(2) \qquad s = na + \frac{n(n-1)}{2}r.$$

Applications. 1° La somme des n premiers nombres entiers

$$1 + 2 + 3 \,\ldots\ldots + n$$

est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

2° La somme des n premiers nombres impairs

$$1 + 3 + 5 \ldots\ldots + (2n-1),$$

est égale à n^2.

Ainsi

$$1 + 3 = 2^2, \quad 1 + 3 + 5 = 3^2, \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2, \text{ etc}$$

3° Trouver le nombre des termes d'une progression arithmétique, connaissant le premier terme, la raison, et la somme des termes.

Appelons s la somme des termes ; la formule

$$s = na + \frac{n(n-1)}{2} r$$

donne, pour déterminer n, une équation du second degré

$$rn^2 + (2a - r)n - 2s = 0.$$

Le dernier terme étant négatif, les deux racines sont toujours réelles et de signes contraires. On rejettera la racine négative. Pour que la racine positive soit admissible, il faut qu'elle soit entière.

4° Trouver cinq nombres en progression arithmétique, connaissant la somme des termes et celle de leurs carrés.

Appelons a et b^2 les deux sommes données; désignons par x le terme du milieu et par y la raison. Les différents termes de la progression s'écriront

$$\div x - 2y \,.\, x - y \,.\, x \,.\, x + y \,.\, x + 2y,$$

et l'on aura les deux équations

$$5x = a,$$
$$5x^2 + 10y^2 = b^2.$$

CHAPITRE II.

PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

Définition.

190. On appelle *progression géométrique* une suite de quantités telles que le rapport de deux consécutives est constant. Le rapport de chaque terme au précédent se nomme *raison*.

La progression est croissante, lorsque la raison est plus grande que l'unité. Ainsi la progression géométrique croissante

$$\div\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458$$

a pour raison 3.

La progression est décroissante, lorsque la raison est plus petite que l'unité. Ainsi la progression géométrique décroissante

$$\div\div\ 1458 : 486 : 162 : 54 : 18 : 6 : 2$$

a pour raison $\frac{1}{3}$.

THÉORÈME I.

191. *Dans une progression géométrique, un terme de rang quelconque égale le premier terme multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent.*

Appelons a, b, c, d,....... les différents termes de la

progression, r la raison. D'après la définition même de la progression géométrique, le second terme égale le premier multiplié par la raison,

$$b = ar.$$

Le troisième terme égale le second multiplié par la raison, et par conséquent le premier multiplié par la seconde puissance de la raison,

$$c = br = arr = ar^2.$$

Le quatrième terme égale le troisième multiplié par la raison, et par conséquent le premier multiplié par la troisième puissance de la raison,

$$d = cr = ar^2r = ar^3,$$

et ainsi de suite. En général le terme qui occupe le n^e rang, et qui par conséquent en a $n - 1$ avant lui, égale

$$ar^{n-1}.$$

Ainsi la progression géométrique peut être mise sous la forme

$$\div\div a : ar : ar^2 : ar^3 : \ldots\ldots;$$

les différents termes sont égaux au premier multiplié par les puissances successives de la raison.

192. REMARQUES. *Les termes d'une progression géométrique croissante augmentent indéfiniment.*

Puisque la progression est croissante, la raison r est plus grande que l'unité, et nous pouvons la représenter par $1 + \alpha$ (α étant une quantité positive, aussi petite qu'on veut). Considérons d'abord la progression

$$\div\div 1 : 1 + \alpha : (1 + \alpha)^2 : (1 + \alpha)^3 \ldots\ldots$$

formée par les puissances successives de la raison. Cher-

chons la différence entre deux termes consécutifs quelconques. De la relation

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n \times (1+\alpha) = (1+\alpha)^n + \alpha(1+\alpha)^n,$$

on déduit

$$(1+\alpha)^{n+1} - (1+\alpha)^n = \alpha(1+\alpha)^n;$$

le facteur $(1+\alpha)^n$, dans le second membre, étant plus grand que l'unité, il en résulte que la différence cherchée est plus grande que α, excepté pour les deux premiers termes, dont la différence est égale à α. Ainsi, les termes de la progression géométrique, formée par les puissances successives de la raison, sont plus grands que les termes correspondants de la progression arithmétique

$$\div 1 . 1+\alpha . 1+2\alpha . 1+3\alpha .....$$

Mais ces derniers augmentent indéfiniment, de manière à devenir plus grands que toute quantité donnée; il en est de même à plus forte raison des premiers.

Un terme quelconque d'une progression géométrique croissante a pour expression $a(1+\alpha)^n$; nous venons de démontrer que, lorsque n croît indéfiniment, $(1+\alpha)^n$ augmente indéfiniment; le produit $a\,(1+\alpha)^n$ de cette quantité par le premier terme a, jouit évidemment de la même propriété.

193. Remarque. 1° *Les termes d'une progression géométrique décroissante tendent vers zéro, quand on prolonge indéfiniment la progression.* La raison, étant plus petite que l'unité, peut être représentée par $\frac{1}{1+\alpha}$; un terme quelconque de la progression sera

$$\frac{a}{(1+\alpha)^n}.$$

Quand n croît indéfiniment, le dénominateur augmentant indéfiniment, la fraction tend vers zéro.

194. *Insérer entre deux nombres un certain nombre de moyens géométriques.* On appelle moyens géométriques, insérés entre deux nombres donnés, des nombres qui forment une progression géométrique dont les nombres donnés sont les deux extrêmes. La question revient évidemment à trouver la raison de la progression.

Soit à insérer n moyens entre a et b. En appelant r la raison cherchée, on a

$$b = ar^{n+1};$$

d'où l'on tire

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}.$$

Ainsi, *on obtient la raison de la progression en extrayant du quotient des deux nombres donnés une racine ayant pour indice le nombre de moyens à insérer plus un.*

THÉORÈME II.

195. *Si, entre deux termes consécutifs d'une progression géométrique, on insère un même nombre de moyens, les progressions partielles ainsi obtenues forment une seule et même progression.*

En effet, puisqu'on insère le même nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression, et que le quotient de ces deux termes est constant, la raison sera la même dans toutes les progressions partielles. Et comme le dernier terme de chacune d'elles égale le premier de la suivante, ces progressions partielles se continuent de manière à ne former qu'une seule et même progression.

THÉORÈME III.

196. *Dans toute progression géométrique, le produit de deux termes également distants des extrêmes est constant et égal au produit des extrêmes.*

Soit la progression

$$\div a : b : c \ldots\ldots : h : k : l.$$

Je considère le second terme et l'avant-dernier ; le seco
terme égale le premier multiplié par la raison,

$$b = ar\,;$$

l'avant-dernier égale le dernier divisé par la raison,

$$k = \frac{l}{r}.$$

On a donc

$$bk = al.$$

On a de même, en considérant les deux termes c et h,

$$c = br,$$

$$h = \frac{k}{r};$$

d'où l'on déduit

$$ch = bk,$$

et ainsi de suite.

Lorsque la progression contient un nombre impair termes, il y a au milieu un terme également distant des trêmes. Le carré de ce terme égale le produit des extrên

Ainsi dans la progression

$$\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458,$$

les termes 2 et 1458, 6 et 486, 18 et 162 donnent le m produit 2916, qui est le carré du terme du milieu 54.

THÉORÈME IV.

197. *Le produit des termes d'une progression géométr égale la racine carrée du produit des extrêmes élevé à puissance marquée par le nombre des termes.*

Soit la progression

$$\div a : b : c \ldots\ldots : a : k : l.$$

Appelons n le nombre des termes, P le produit des tern

ivons ce produit au-dessous de lui-même en ordre inverse.

$$P = abc \ldots\ldots akl,$$
$$P = lkh \ldots\ldots cba.$$

voit que les deux facteurs placés l'un au-dessous de l'autre it des termes également distants des extrêmes dans la gression, et que par conséquent leur produit est constant égal au produit des extrêmes al. Si donc on multiplie les ıx produits l'un par l'autre, le produit total se composera produit des extrêmes élevé à une puissance marquée par nombre des termes. On aura

$$P^2 = (al)^n;$$

ù

$$P = \sqrt{(al)^n}.$$

En remplaçant l par sa valeur

$$l = ar^{n-1},$$

obtient cette autre formule

$$P = \sqrt{a^{2n} r^{n(n-1)}} = a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

i n'exige plus l'extraction d'une racine carrée; car l'exsant $n(n-1)$, produit de deux nombres entiers consécu-, est toujours pair.

THÉORÈME V.

198. *On obtient la somme des termes d'une progression métrique en retranchant du premier terme le dernier ultiplié par la raison et divisant la différence par l'unité ins la raison.*

Appelons S la somme cherchée,

$$S = a + ar + ar^2 \ldots\ldots + ar^{n-1}.$$

Multiplions-la par la raison r, nous avons

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 \ldots\ldots + ar^n.$$

Si nous retranchons cette seconde égalité de la première, tous les termes se détruisent dans les seconds membres, excepté le premier et le dernier, et il vient

$$S(1 - r) = a - ar^n,$$

d'où l'on déduit

$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r},$$

ou

$$(1) \qquad S = \frac{a - lr}{1 - r}.$$

On emploie cette formule telle qu'elle est si la progression est décroissante. Mais si la progression est croissante, les deux termes de la fraction étant négatifs, on changera leurs signes, et l'on aura

$$(2) \qquad S = \frac{lr - a}{r - 1}.$$

Exemple : la somme des termes de la progression géométrique croissante

$$\div\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458$$

est, d'après la formule (2)

$$S = \frac{1458 \times 3 - 2}{3 - 1} = 2186.$$

La somme des termes de la même progression écrite en ordre inverse et alors décroissante est, d'après la formule (1),

$$S = \frac{1458 - 2 \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2186.$$

Remarque. On obtient aussi les formules précédentes en écrivant la somme cherchée sous la forme

$$S = a(1 + r + r^2 \ldots\ldots + r^{n-1})$$

et remarquant que la parenthèse est le quotient de $1 - r^n$

par $1-r$ (n° 74), ce qui donne immédiatement

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

THÉORÈME VI.

199. *La somme des termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini tend vers une limite égale au premier terme divisé par l'unité moins la raison.*

Supposons que la progression géométrique décroissante

$$\div\!\div\ a : ar : ar^2 : \ldots\ldots$$

se prolonge indéfiniment. La somme des n premiers termes est donnée par la formule

$$(1)\qquad S = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

Si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand, la raison r étant plus petite que l'unité en valeur absolue, le terme ar^n de la progression décroissante diminue de plus en plus, et tend vers zéro, ainsi que la quantité $\frac{ar^n}{1-r}$, à mesure que n augmente ; donc la somme des termes se rapproche indéfiniment de la quantité fixe $\frac{a}{1-r}$, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra. En un mot, la somme des termes tend vers la limite $\frac{a}{1-r}$.

Le mode de convergence de la somme des termes vers sa limite n'est pas le même suivant que la raison est positive ou négative. Pour fixer les idées, supposons que le premier terme a soit une quantité positive. Lorsque la raison est positive, tous les termes de la progression sont positifs; dans ce cas, il est évident que la somme va en augmentant

à mesure que l'on prend un plus grand nombre de termes; mais elle n'augmente pas au delà de toute limite, car elle reste toujours inférieure à la quantité fixe $\frac{a}{1-r}$; elle ne peut même atteindre rigoureusement cette limite, dont elle se rapproche indéfiniment.

Lorsque la raison est négative, les termes de la progression sont alternativement positifs et négatifs ; la formule (1) montre que la somme des n premiers termes est tantôt plus petite, tantôt plus grande que la quantité fixe $\frac{a}{1-r}$ dont elle se rapproche de plus en plus ; si n est pair, la différence $-\frac{ar^n}{1-r}$ est négative, et la somme plus petite que la limite ; au contraire, si n est impair, la différence est positive et la somme plus grande que la limite ; ainsi dans ce cas, la somme des termes converge vers sa limite $\frac{a}{1-r}$, en oscillant de part et d'autre.

Applications. 1° La somme des termes de la progression décroissante

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots,$$

dont la raison est $\frac{1}{2}$, a pour limite

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

On voit bien sur cet exemple comment les sommes consécutives

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16},\ldots,$$

obtenues en prenant, le premier terme, les deux premiers, les trois premiers, etc., tendent vers la limite 1 ; la première somme diffère de l'unité de $\frac{1}{2}$, la seconde de $\frac{1}{4}$, la troisième de $\frac{1}{8}$, la quatrième de $\frac{1}{16}$, et ainsi de suite.

2° La somme des termes de la progression décroissante

$$\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{16}+\ldots\ldots,$$

dont la raison est $-\frac{1}{2}$, a pour limite

$$\frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}}=1.$$

Dans ce second exemple, la raison est négative et les sommes consécutives

$$\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{9}{8},\ \frac{15}{16},\ \frac{33}{32},\ldots\ldots,$$

sont alternativement plus petites et plus grandes que la limite 1; la première surpasse l'unité de $\frac{1}{2}$, la seconde en diffère de $\frac{1}{4}$, la troisième la surpasse de $\frac{1}{8}$, la quatrième en diffère de $\frac{1}{16}$, etc.

3° Les fractions décimales périodiques sont des progressions géométriques décroissantes. Par exemple, la fraction décimale périodique simple

$$0{,}353535\ \ldots\ldots$$

peut s'écrire

$$\frac{35}{100}+\frac{35}{100^2}+\frac{35}{100^3}+\ldots\ldots;$$

c'est une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{100}$.
La somme des termes tend vers la limite

$$\frac{\frac{35}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{35}{99}.$$

Cette limite est ce qu'on appelle la valeur de la fraction décimale périodique.

CHAPITRE III.

LOGARITHMES.

Définition.

200. Étant données deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro,

$$\because\because\ 1 : a : a^2 : a^3 : a^4 : \ldots\ldots,$$
$$\div\ 0 . b . 2b . 3b . 4b . \ldots\ldots,$$

les termes de la progression arithmétique sont dits les *logarithmes* des termes correspondants de la progression géométrique. L'ensemble de ces deux progressions constitue ce qu'on appelle un *système* de logarithmes.

On suppose en général que la raison a de la progression géométrique est plus grande que l'unité, la raison b de la progression arithmétique étant d'ailleurs positive ; de cette manière les termes de la progression géométrique augmentent indéfiniment, de même que les termes de la progression arithmétique.

201. Nous avons défini de la sorte les logarithmes des nombres qui font partie de la progression géométrique ; il est facile d'étendre cette définition à tous les nombres. Concevons que l'on insère un très-grand nombre de moyens géométriques entre deux termes consécutifs de la progression géométrique, on formera une nouvelle progression géométrique procédant par intervalles beaucoup plus res-

serrés. Si, par exemple, on insère mille moyens géo triques entre deux termes consécutifs, la nouvelle prog sion renfermera mille nombres entre 1 et a, mille ent et a^2, etc. En insérant le même nombre de moyens ar métiques entre deux termes consécutifs de la progress arithmétique, on formera une nouvelle progression ar métique qui donnera exactement les logarithmes de tous nombres inscrits dans la nouvelle progression géométriq et approximativement les logarithmes de tous les au nombres.

Soit $n-1$ le nombre des moyens insérés. Appelon la raison de la nouvelle progression géométrique, r c de la nouvelle progression arithmétique; on a

$$q=\sqrt[n]{a}, \quad r=\frac{b}{n},$$

et les deux nouvelles progressions s'écrivent

$$\because 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots\ldots,$$
$$\div\ 0 . r . 2r . 3r . \ldots\ldots$$

On voit que la raison r de la nouvelle progression ar métique est aussi petite qu'on veut. Je vais démontrer l'excès de la raison q de la nouvelle progression géométri sur l'unité peut être aussi rendue plus petite que toute q tité donnée. En effet, l'inégalité

$$\sqrt[n]{a} < 1+\alpha,$$

sera satisfaite si l'on a

$$a < (1+\alpha)^n,$$

ou

$$(1+\alpha)^n > a.$$

Or, si petit que soit α, on sait (n° 192) que n peut pris assez grand pour que $(1+\alpha)^n$ surpasse la qua donnée a. Pour cette valeur de n et pour toutes les val plus grandes, la raison q sera donc moindre que $1+\alpha$.

Soit A un nombre positif quelconque plus grand que l'unité; si ce nombre fait partie de la nouvelle progression géométrique, le terme correspondant de la progression arithmétique donnera exactement son logarithme. Si ce nombre ne fait pas partie de la progression géométrique, il sera compris entre deux termes consécutifs q^m et q^{m+1}; or la différence de ces deux termes

$$q^{m-1} - q^m = q^m(q - 1),$$

étant moindre que $A\alpha$, puisque q^m est plus petit que A, et $q-1$ plus petit que α, peut être rendue aussi petite qu'on veut; le nombre A différera donc de chacun des termes qui le comprennent aussi peu qu'on voudra. On prendra approximativement pour le logarithme de A celui de l'un d'eux, soit mr, soit $(m+1)r$; l'erreur commise sur ce logarithme, étant moindre que la raison r ou $\frac{b}{n}$, sera aussi petite qu'on voudra.

Propriétés fondamentales des logarithmes.

Théorème I.

202. ***Le logarithme du produit de plusieurs facteurs égale la somme des logarithmes de ces facteurs.***

Considérons les deux progressions

$$\div\div\, 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots,$$
$$\div\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, 4r \,.\, \ldots\ldots,$$

au moyen desquelles on définit les logarithmes. Nous remarquons que les termes de la progression arithmétique sont les multiples successifs de la raison, et que les termes de la progression géométrique sont les puissances successives de la raison. Ces progressions sont disposées de manière que les termes qui occupent le même rang soient placés l'un au-dessous de l'autre; on voit que, dans deux

termes correspondants q^m et mr, le même nombre m ser la fois d'exposant et de multiplicateur.

Je multiplie deux termes quelconques q^m et q^n de la pr gression géométrique, ce qui se fait en ajoutant les exp sants; le produit q^{m+n} est aussi un terme de la progressi géométrique. J'additionne leurs logarithmes, c'est-à-di les deux termes correspondants mr et nr de la progressi arithmétique; la somme $(m+n)r$ est aussi un terme de progression arithmétique. Or on voit que le produit q^{m+n} la somme $(m+n)r$ se correspondent dans les deux progre sions. Donc le logarithme du produit égale la somme d logarithmes des facteurs.

En général, soient a et b deux nombres quelconques, aura

$$\log(a \times b) = \log a + \log b.$$

Ce théorème s'étend évidemment à un nombre quelco que de facteurs.

Théorème II.

203. *Le logarithme d'un quotient égale le logarithme dividende moins le logarithme du diviseur.*

Appelons c le quotient de a par b (a étant supposé pl grand que b). On a

$$a = b \times c,$$

et, d'après le théorème précédent,

$$\log a = \log b + \log c;$$

d'où

$$\log c = \log a - \log b.$$

Ainsi

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Théorème III.

204. *Le logarithme de la puissance d'un nombre égale le logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de la puissance.*

En effet, la puissance a^m étant le produit de m facteurs égaux à a, on a

$$a^m = a \times a \times a \times \ldots\ldots;$$

d'où

$$\log a^m = \log a + \log a + \log a + \ldots\ldots,$$
$$\log a^m = m \log a.$$

Ainsi le logarithme du carré d'un nombre égale deux fois le logarithme de ce nombre, le logarithme du cube égale trois fois le logarithme du nombre, etc.

Théorème IV.

205. *Le logarithme de la racine d'un nombre égale le logarithme du nombre divisé par l'indice du radical.*

Appelons b la racine m^e de a; on a

$$a = b^m;$$

et, d'après le théorème précédent,

$$\log a = m \log b;$$

d'où

$$\log b = \frac{\log a}{m}.$$

Ainsi

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}.$$

Par exemple, la racine carrée ou la racine cubique d'un nombre a pour logarithme la moitié ou le tiers du logarithme de ce nombre.

206. Remarque. En arithmétique, on apprend à effec-

tuer six opérations sur les nombres : trois opérations rectes et trois opérations inverses. Les trois opérations rectes sont l'addition, la multiplication et l'élévation puissances. Les trois opérations inverses sont la soustr tion, la division et l'extraction des racines. La soustracti est l'opération inverse de l'addition; la division est l'opé tion inverse de la multiplication; l'extraction des raci est l'opération inverse de l'élévation aux puissances.

Il y a ainsi trois ordres d'opérations, comprenant ch cun une opération directe et une opération inverse. I opérations du premier ordre, addition et soustraction, s' fectuent facilement et avec rapidité; celles du second ord multiplication et division, sont déjà plus longues et pl difficiles ; enfin celles du troisième ordre, puissance et racir deviennent très-longues et très-pénibles. Les propriétés d logarithmes, que nous venons de démontrer, permette de remplacer les opérations du second et du troisième ord par celles d'un ordre moins élevé. Ainsi la multiplicati et la division sont ramenées à l'addition ou à la soustr tion des logarithmes, la puissance revient à une multip cation, la racine à une division. On comprend par là to l'utilité des logarithmes.

Logarithmes vulgaires.

207. Les deux progressions par lesquelles on définit logarithmes dont on fait habituellement usage, et qu appelle pour cette raison *logarithmes vulgaires*, sont suivantes

$$\div\!\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : \ldots\ldots,$$
$$\div\ 0 . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots$$

Dans ce système, le logarithme de 10 est 1, celui de 100

2, celui de 1000 est 3; en général 10^n a pour logarithme le nombre entier n.

On nomme *base* d'un système de logarithmes le nombre qui a pour logarithme l'unité. Le système des logarithmes vulgaires, que l'on appelle aussi logarithmes de *Briggs*, a pour base le nombre *dix*, qui est la base de notre système de numération.

208. Les logarithmes ont été calculés en décimales; la partie entière d'un logarithme s'appelle *caractéristique*. Il est aisé de voir que *la caractéristique du logarithme d'un nombre renferme autant d'unités qu'il y a de chiffres dans la partie entière du nombre moins un.* En effet, tout nombre compris entre 1 et 10 n'a qu'un chiffre à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre 0 et 1, aura 0 pour partie entière ou pour caractéristique. Tout nombre compris entre 10 et 100 a deux chiffres à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre 1 et 2, aura 1 pour caractéristique. De même, tout nombre compris entre 100 et 1000 a 3 chiffres à sa partie entière, son logarithme, étant compris entre 2 et 3, a 2 pour caractéristique. En général tout nombre compris entre 10^n et 10^{n+1} a $n+1$ chiffres à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre n et $n+1$, a n pour caractéristique.

209. Le logarithme de 10^n est n. Si l'on multiplie un nombre a par 10^n, on a

$$\log(a \times 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n.$$

La partie décimale du logarithme reste la même; il suffit d'ajouter n unités à la caractéristique.

Si l'on divise un nombre a par 10^n, on a

$$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n,$$

La partie décimale reste la même ; il suffit de retrancher *n* unités de la caractéristique.

Ainsi, *quand on multiplie ou quand on divise un nombre par* 10, 100, 1000..., *il suffit d'augmenter ou de diminuer la caractéristique du logarithme d'une, deux, trois ..... unités.*

Il en résulte que, lorsque deux nombres décimaux ne diffèrent que par la place qu'occupe la virgule, leurs logarithmes ont la même partie décimale et ne diffèrent que par la caractéristique. Ceci est important pour la facilité des calculs, parce qu'on a souvent à déplacer la virgule dans les nombres décimaux.

Tables de Callet.

210. Les tables de logarithmes les plus usitées en France sont les petites tables de LALANDE et les grandes tables de CALLET.

Les tables de Lalande contiennent les logarithmes des nombres entiers de 1 à 10000, avec cinq décimales.

On a appris en arithmétique l'usage des tables de Lalande ; nous ne parlerons ici que des tables de Callet.

Les tables de Callet contiennent les logarithmes des nombres entiers de 1 à 108000. La première partie de la table, nommée première *chiliade* (premier mille), contient les logarithmes des 1200 premiers nombres avec huit décimales. La table change ensuite de disposition, et donne les logarithmes des nombres de 10200 à 100000, avec sept décimales ; à la fin, la table se prolonge de 100000 à 108000, avec huit décimales. Dans la colonne verticale intitulée N, on lit les dizaines des nombres ; les unités sont inscrites au haut de la page et en tête des dix colonnes intitulées 0, 1, 2,... 8, 9. La caractéristique n'est pas indi-

quée: il est facile de l'ajouter d'après la règle énoncée. Dans la colonne voisine, on trouve les trois premiers chiffres décimaux de chaque logarithme ; les quatre suivants sont inscrits dans la colonne convenable. Si l'on veut, par exemple, le logarithme du nombre 35647, dans la colonne verticale intitulée N on descendra jusqu'au nombre 3564, puis, dans cette ligne horizontale, on s'avancera vers la droite jusqu'à la colonne intitulée 7, et l'on écrira

$$\log 35647 = 4{,}5520230.$$

Le nombre ayant cinq chiffres, on commencera par écrire sa caractéristique 4 ; les trois premiers chiffres décimaux 552 sont communs à un assez grand nombre de logarithmes ; on trouve les quatre derniers, 0230, dans la colonne verticale intitulée 7.

Pour effectuer des calculs par logarithmes, il faut savoir résoudre ces deux questious : 1° trouver le logarithme d'un nombre donné ; 2° trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné.

Trouver le logarithme d'un nombre donné.

211. *Trouver le logarithme d'un nombre entier.* Si le nombre est dans la limite des tables, s'il est plus petit que 108000, on trouve immédiatement dans les tables le logarithme demandé.

Si le nombre surpasse la limite des tables, on l'y ramène, en le divisant par une puissance de 10. On demande, par exemple, le logarithme du nombre 356478. Afin de rendre ce nombre plus petit que 100000, on le divise par 10, ce qui donne le nombre décimal 35647,8. La question revient à chercher le logarithme de ce nombre décimal ; car, une fois ce logarithme trouvé, en ajoutant 1 à sa caractéristique, on aura le logarithme demandé.

Les tables donnent le logarithme de la partie
35647. La différence entre ce logarithme et celui d
bre suivant 35648 est 122 unités du septième ordr
mal. Les accroissements du logarithme ne sont pas
tionnels aux accroissements du nombre; mais, q
s'agit d'accroissements plus petits que l'unité, et p
séquent très-petits par rapport au nombre lui-mê
peut admettre la proportion sans erreur sensible.
donc : puisque, pour une augmentation d'une uni
le nombre 35647, il faut ajouter 122 au logarithm
une augmentation de 0,8 dans le nombre il faudra
au logarithme les $\frac{8}{10}$ de 122, soit $\frac{122 \times 8}{10}$, ou 98 u
septième ordre, en négligeant les unités plus petit

Mais on trouve cette augmentation toute calcul
les tables de Callet; car, dans la dernière colonne
à droite, on voit, au-dessous de la différence 122,
tableau indiquant les augmentations du logarith
correspondent à 1, 2, 3, ... 9 dixièmes. Ainsi

$$
\begin{array}{r}
\log 35647 = 4,5520230 \\
\text{pour } 0,8. \ldots\ldots \quad 98 \\
\hline
\log 356478 = 4,5520328
\end{array}
$$

En ajoutant une unité à la caractéristique, on a

$$\log 356478 = 5,5520328.$$

Soit encore à calculer le logarithme du nombre 2
En divisant par 100, on ramènera le nombre pro
nombre décimal 25432,47. La table donne le log
de la partie entière. La table des parties proporti
montre qu'à une augmentation de 0,4 dans le nom
respond une augmentation 68 dans le logarithme.
à trouver ce qu'il faut encore ajouter pour 0,07.
dans la table qu'à 0,7 correspond une augmentati

à 0,07 correspondra donc une augmentation dix fois plus petite, soit 12. Il faut donc au logarithme de 25432 ajouter 68 + 12, c'est-à-dire 80. Faisant le calcul de tête, on écrira de suite

$$\log 25432{,}47 = 4{,}4053885.$$

En ajoutant 2 unités à la caractéristique, on en déduit

$$\log 2543247 = 6{,}4053885.$$

212. Il est à remarquer que, dans le calcul de l'augmentation du logarithme, on doit tenir compte seulement des trois premiers chiffres décimaux du nombre proposé; on négligera les suivants, parce qu'ils n'ont pas d'influence sur les sept premiers chiffres décimaux du logarithme. On demande, par exemple, le logarithme du nombre 11056,4852. Après avoir cherché dans les tables le logarithme de 11056, on dira, à l'aide des parties proportionnelles placées au-dessous de la différence 393 : à 0,4 correspond 157, à 0,08 correspond 31, à 0,005 correspond 2; en tout 190 qu'il faut ajouter au logarithme de 11056, ce qui donne

$$\log 11056{,}485 = 4{,}0436170.$$

Le plus souvent même, le troisième chiffre décimal n'a pas d'influence sensible sur le résultat. Soit à trouver le logarithme de 46867,284. Après avoir trouvé le logarithme de 46867, on voit qu'à 0,2 correspond une augmentation 18, à 0,08 une augmentation 7; le chiffre des millièmes n'a pas d'influence; il faut donc ajouter 18 + 7 ou 25 au logarithme de 46867, ce qui donne

$$\log 46867{,}28 = 4{,}6708697.$$

Quand le chiffre des millièmes est plus grand que 5, on force le chiffre des centièmes.

213. ***Trouver le logarithme d'un nombre décimal.*** On demande le logarithme du nombre décimal 35,6478. On le

multipliera par une puissance de 10, de manière qu'il se rapproche le plus possible de la limite des tables. Si l'on opère avec les tables de Callet, on multipliera par 1000 et on cherchera le logarithme du nombre 35647,8; puis on retranchera trois unités de la caractérisque;

$$\log 35647,8 = 4,5520328$$
$$\log 35,6478 = 1,5520328.$$

214. *Trouver le logarithme d'un nombre fractionnaire.* Il y a deux manières de procéder : ou bien on convertira le nombre fractionnaire en nombre décimal et on appliquera la règle précédente; ou bien, mettant le nombre fractionnaire sous forme de fraction ordinaire, et remarquant qu'une fraction égale le quotient de son numérateur par son dénominateur, on retranchera du logarithme du numérateur le logarithme du dénominateur.

Caractéristiques négatives.

215. Les deux progressions par lesquelles nous avons défini les logarithmes, nous donnent, avec une approximation aussi grande qu'on veut, les logarithmes de tous les nombres plus grands que l'unité. Voici comment on définit les logarithmes des nombres plus petits que l'unité.

Imaginons que l'on prolonge les deux progressions vers la gauche, comme on les a prolongées vers la droite; en ce qui concerne la progression géométrique, chaque terme étant égal au terme placé à sa droite divisé par la raison, on prolongera la progression vers la gauche en divisant par la raison; de même, chaque terme de la progression arithmétique étant égal au terme placé à sa droite, moins la raison, on prolongera cette progression en retranchant la raison. De cette manière, les deux progressions de-

viennent

$$\ldots\ldots : \frac{1}{q^3} : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots -3r \,.\, -2r - r \,.\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, 4r \,.\, \ldots\ldots$$

les nombres $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{q^2}$,....., plus petits que l'unité, auront ainsi des logarithmes négatifs $-r$, $-2r$,.....

La propriété fondamentale des logarithmes, savoir que le logarithme d'un produit égale la somme des logarithmes des facteurs subsiste, pourvu que l'on entende que le logarithme du produit égale la somme *algébrique* des logarithmes des facteurs. En effet, dans la progression géométrique, prenons d'abord deux termes q^m, $\frac{1}{q^n}$, le premier plus grand que l'unité, le second plus petit; si $m > n$, le produit de ces deux termes sera q^{m-n}; la somme algébrique des termes correspondants mr et $-nr$ de la progression arithmétique est $(m-n)r$; c'est le logarithme du produit. Si $m < n$, le produit est $\frac{1}{q^{n-m}}$; la somme algébrique des logarithmes $-(n-m)r$ est le terme correspondant de la progression arithmétique; c'est le logarithme du produit. Prenons maintenant deux facteurs $\frac{1}{q^m}$ et $\frac{1}{q^n}$ plus petits que l'unité; la somme des logarithmes $-mr-nr$ ou $-(m+n)r$ est encore le logarithme du produit $\frac{1}{q^{m+n}}$. Ainsi, dans tous les cas, le logarithme du produit égale la somme algébrique des logarithmes des facteurs.

Le théorème relatif à la multiplication étant ainsi généralisé, ceux relatifs à la division, à l'élévation aux puissances et à l'extraction des racines, qui se déduisent du premier, ont le même degré de généralité.

Reprenons maintenant les progressions qui ont servi à définir les logarithmes vulgaires

$$\ldots\ldots : 0{,}001 : 0{,}01 : 0{,}1 : 1 : 10 : 100 : 1000 : \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \,.\, -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\ldots\ldots$$

et prolongeons-les vers la droite, comme nous l'avons di on voit que tous les nombres compris entre 1 et 0,1 o leurs logarithmes compris entre 0 et — 1, les nombres com pris entre 0,1 et 0,01 ont leurs logarithmes compris ent — 1 et — 2, les nombres compris entre 0,01 et 0,001 o leurs logarithmes compris entre — 2 et — 3, et ainsi de suit

216. Mais, dans la pratique, on ne se sert pas de c logarithmes entièrement négatifs ; on laisse positive la par décimale et on rend négative seulement la partie enti ou la caractéristique. On demande, par exemple, le log rithme du nombre 0,035261. On trouvera dans la table logarithme du nombre entier 35261, qui est

$$4{,}5472946.$$

Le logarithme du nombre décimal 3,5261, qui n'a qu' chiffre à sa partie entière, est

$$0{,}5472946.$$

Pour passer de ce dernier nombre à la fraction décim proposée, il faut diviser par 10^2 et par conséquent retr cher 2 unités du logarithme ; le logarithme du nombre cimal 0,035261 est donc

$$0{,}5472946 - 2,$$

ce qu'on écrit plus simplement

$$\bar{2}{,}5472946,$$

la partie décimale restant positive, la caractéristique se 2 étant négative.

On peut remarquer que *la caractéristique négative du logarithme d'une fraction décimale est égale au rang du premier chiffre significatif après la virgule.*

Il y a un grand avantage à laisser ainsi positive la partie décimale du logarithme d'un nombre moindre que l'unité; quand on a à calculer le produit de plusieurs facteurs, les uns plus grands que l'unité, les autres plus petits, on additionnera les parties décimales de tous les logarithmes et on retranchera seulement les caractéristiques négatives; ce qui est très-simple. Et d'ailleurs, c'est sous cette forme que l'on obtient, au moyen des tables, les logarithmes des nombres plus petits que l'unité.

Nous avons écrit le logarithme du nombre 0,035261 sous la forme

$$\bar{2},5472946,$$

laissant positive la partie décimale; en effectuant la soustraction, on a le logarithme négatif

$$-1,4527054.$$

Mais si l'on employait les logarithmes entièrement négatifs, il faudrait additionner les uns, retrancher les autres, ce qui serait beaucoup plus compliqué.

Trouver le nombre qui admet un logarithme donné.

217. Trouver le nombre qui a pour logarithme 4,5520332 avec les tables de Callet. On regarde dans les tables quel est le plus grand logarithme contenu dans le logarithme donné; c'est 4,5520230 qui correspond au nombre 35647; le nombre cherché est donc compris entre 35647 et 35648. Le logarithme donné surpasse le logarithme de 35647 de 102 unités du septième ordre: or, la différence tabulaire est 122, c'est-à-dire que si l'on augmentait le logarithme de

35647 de 122 unités du dernier ordre, il faudrait augme d'une unité le nombre 35647 ; si l'on suppose les accr sements du nombre proportionnels à ceux du logarith à une augmentation 102 dans le logarithme correspon dans le nombre une augmentation égale à $\frac{102}{122} =$ o,

Mais il est plus commode de se servir de la petite t des parties proportionnelles : cette table montre qu'à augmentation 98 dans le logarithme correspond une a mentation 0,8 dans le nombre. Il nous reste 4 ; à l'a mentation 40 dans le logarithme correspond une augm tation 0,3 dans le nombre ; à l'augmentation dix fois] petite 4 correspondra donc une augmentation 0,03. A à l'augmentation 102 dans le logarithme correspond augmentation 0,83 dans le nombre. Le nombre che est donc 35647,83 à un centième près.

218. On ramène toujours la caractéristique du logarit donné à être égale à 4, sauf à multiplier ou à diviser suite le nombre trouvé par une puissance de 10.

Exemples : 1° Trouver le nombre qui a pour logarit 5,5520332. Je retranche 1 de la caractéristique pour rame le logarithme dans les limites des tables, et je cherch nombre qui a pour logarithme 4,5520332 ; c'est 35647, Pour revenir au logarithme donné, il faut ajouter 1 à caractéristique, et par conséquent multiplier par 10 : nombre cherché est donc 356478,3 à un dixième près.

2° Trouver le nombre qui a pour logarithme 1,55203 On ajoutera 3 unités à la caractéristique, et l'on cherc le nombre qui a pour logarithme 4,5520332 ; c'est 35647, Pour revenir au logarithme proposé, il faut retrancher 3 d caractéristique, et par conséquent diviser par 1000 ; le n bre cherché est donc 35,64783 avec cinq décimales exac

On voit qu'il y a un grand avantage à augmenter la cara

ristique de manière à opérer dans la partie la plus élevée des tables ; si l'on avait conservé la caractéristique 1, on aurait trouvé le nombre 35,65 avec deux décimales seulement, tandis qu'en opérant comme on l'a fait, on a obtenu cinq décimales.

3° Trouver le nombre qui a pour logarithme $\bar{2},5520332$. Je cherche le nombre qui a pour logarithme 0,5520332 ; c'est 3,564783. La caractéristique négative $\bar{2}$ indique qu'il faut diviser ce nombre par 100 ; le nombre demandé est donc 0,03564783.

219. Il est aisé de voir que lorsqu'on remonte des logarithmes aux nombres (avec les tables de Callet), on obtient les nombres avec une approximation relative égale à un *quatre-millionième.* Soit, par exemple, 4,0359772 le logarithme donné. Il contient le logarithme de 10863, plus la différence 274, qui, divisée par la différence tabulaire 400, donne l'augmentation 0,685 ; le nombre cherché est 10863,685. Évaluons maintenant l'approximation. Quand le nombre varie d'une unité, le logarithme éprouve une variation égale à la différence tabulaire 400 unités du septième ordre décimal ; il faut donc une variation de $\frac{1}{400}$ dans le nombre pour produire dans le logarithme une variation d'une unité du septième ordre décimal ; ainsi on obtiendra le nombre à moins de $\frac{1}{400}$ près. Le nombre étant plus grand que 10000, l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{4000000}$. Dans l'exemple actuel, l'erreur absolue étant moindre que $\frac{1}{400}$ ou que 0,0025, on n'est pas sûr du dernier chiffre 5 ; cependant comme il est approché à moins de trois unités, il est bon de le conserver.

L'erreur absolue augmente à mesure qu'on s'élève la table; mais l'erreur relative reste la même. Soi exemple, 4,6020673 le logarithme donné. L'erreur al commise sur le nombre s'élève ici à $\frac{1}{109}$; mais le n est plus grand que 40000; l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{4000000}$.

Remarques sur l'emploi des logarithmes.

200. Multiplication. Lorsque les facteurs sont grands que l'unité, on ajoute leurs logarithmes; il là aucune difficulté.

Lorsque certains facteurs sont plus petits que l'ı leurs logarithmes ont des caractéristiques négatives diquent la division par des puissances de 10; on au de retrancher ces caractéristiques négatives.

1° Calculer le produit

$$x = 875,6349 \times 62,82407.$$

On cherchera les logarithmes des deux facteurs et ajoutera, ce qui donne le logarithme du produit; p cherchera dans les tables le nombre correspondant.

$$\begin{aligned} \log 875,6349 &= 2,9423230 \\ \log 62,82407 &= 1,7981261 \\ \hline \log x &= 4,7404491 \\ x &= 55010,95. \end{aligned}$$

2° Calculer le produit

$$\begin{aligned} x &= 87,56349 \times 0,06282407 \\ \log 87,56349 &= 1,9423230 \\ \log 0,06282407 &= \bar{2},7981261 \\ \hline \log x &= 0,7404491 \\ x &= 5,501095. \end{aligned}$$

En ajoutant les logarithmes, on trouve 2 pour partie entière; mais comme il faut retrancher 2, il reste 0.

3° Calculer le produit

$$x = 87,56349 \times 0,006282407$$
$$\log 87,56349 = 1,9423230$$
$$\log 0,006282407 = \bar{3},7981261$$
$$\log x = \bar{1},7404491$$
$$x = 0,5501095.$$

L'addition des logarithmes donne 2 pour partie entière; mais comme il faut retrancher 3, on obtient la caractéristique négative $\bar{1}$.

4° Calculer le produit

$$x = 0,08756349 \times 0,006282407$$
$$\log 0,08756349 \times \bar{2},9423230$$
$$\log 0,006282407 = \bar{3},7981261$$
$$\log x = \bar{4},7404491$$
$$x = 0,0005501095.$$

L'addition des logarithmes donne 1 pour partie entière; comme il faut retrancher 2 et 3, c'est-à-dire 5, on a la caractéristique négative $\bar{4}$.

221. Division. On sait que pour effectuer une division, il faut du logarithme du dividende retrancher le logarithme du diviseur. Lorsqu'on n'a qu'une simple division à faire on peut procéder de cette manière; mais, quand on a une série de multiplications et de divisions à effectuer, il est plus commode de n'avoir que des logarithmes à ajouter. Pour cela on transforme les logarithmes à retrancher, de manière que leurs parties décimales deviennent positives.

Soit, par exemple, à calculer

$$x = \frac{236,39 \times 127,46}{564,87}.$$

Il faut retrancher le logarithme de 564,87, qui es 2,7519485. On écrira

$$-2,7519485 = -2 - 0,7519485 = -3 + 1 - 0,7519485$$
$$= -3 + 0,2480515 = \bar{3},2480515.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} \log 236,39 &= 2,3736291 \\ \log 127,46 &= 2,1053739 \\ -\log 564,87 &= \bar{3},2480515 \\ \hline \log x &= 1,7270545 \\ x &= 53,34019. \end{aligned}$$

Quand on a ainsi rendu positive la partie décimale d —log 564,87, on additionne les parties décimales des tro logarithmes; la soustraction ne porte plus que sur la ca ractéristique, ce qui est une grande simplification.

Soit encore à calculer

$$x = \frac{0,23639 \times 1,2746}{0,0056487}.$$

Il faut diviser par le nombre 0,0056487, qui a pou logarithme $\bar{3}$,7519485. On écrira

$$-\bar{3},7519485 = +3 - 0,7519485 = 2 + 1 - 0,7519485$$
$$= 2,2480515.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} \log 0,23639 &= \bar{1},3736291 \\ \log 1,2746 &= 0,1053739 \\ -\log 0,0056487 &= 2,2480515 \\ \hline \log x &= 1,7270545 \\ x &= 53,34019. \end{aligned}$$

222. Remarquons cette manière de procéder : *Pour retrancher un logarithme, on retranche une unité de la caractéristique changée de signe et l'on écrit à la suite le complément arithmétique de la partie décimale.*

Ainsi, dans le premier exemple, au lieu de retrancher 2,7519485, on a ajouté $\bar{3}$,2480515. La caractéristique 2, changée de signe et diminuée d'une unité donne $\bar{3}$; en prenant l'excès de l'unité sur la partie décimale 7519485, on obtient 2480515.

Dans le second exemple, au lieu de retrancher $\bar{3}$,7519485, on a ajouté 2,2480515. La caractéristique $\bar{3}$, changée de signe et diminuée d'une unité, donne 2.

Quant à l'excès de l'unité sur la partie décimale du logarithme, ce qu'on appelle le complément arithmétique, on l'obtient aisément. De 1 il faut retrancher 0,7519485. Or, une unité vaut 9 dixièmes et 10 centièmes; 10 centièmes valent 9 centièmes et 10 millièmes, etc. L'unité égale donc 0,999999 plus 10 unités du septième ordre. En effectuant la soustraction de gauche à droite, on obtient le complément demandé :

$$\begin{array}{r} 0,999999^{10} \\ 0,7519485 \\ \hline 0,2480515 \end{array}$$

Ainsi, *pour avoir le complément de la partie décimale d'un logarithme, on retranche tous les chiffres de* 9, *en allant de gauche à droite, excepté le dernier que l'on retranche de* 10.

Avec un peu d'habitude, on lit immédiatement le complément dans la table, en regardant le logarithme.

223. Puissances. On sait qu'on élève un nombre à une puissance en multipliant son logarithme par l'indice de la puissance.

1° Calculer $x = 5^{10}$. On cherchera d'abord le lo
de 5, puis on multipliera ce logarithme par 10.

$$\log 5 = 0,69897000$$
$$\log x = 6,9897000$$
$$x = 9765624.$$

2° Calculer $x = 0,4326^3$.

$$\log 0,4326 = \bar{1},6360865$$
$$\log x = \bar{2},9082595$$
$$x = 0,08095794.$$

En multipliant par 3 la partie décimale 0,636
logarithme, on trouve 1,9082595; en multipliant
caractéristique négative — 1, on a — 3; il faut dor
cher 3 de la partie entière du logarithme, ce qu
$\bar{2}$,9082595.

3° Calculer $x = \left(\frac{2}{37}\right)^5$.

$$\log 2 = 0,30103000$$
$$-\log 37 = \bar{2},43179828$$
$$\log \tfrac{2}{37} = \bar{2},73282828$$
$$\log x = \bar{7},6641414$$
$$x = 0,0000004614677.$$

En multipliant par 5 la partie décimale du log
on trouve 3 pour partie entière. La caractéristiq
tive — 2, multipliée par 5, donne — 10; en ret
10 de la partie entière, on obtient la caractéristiq
tive $\bar{7}$.

224. Racines. On extrait la racine d'un nombre
sant son logarithme par l'indice de la racine.

1° Calculer $x = \sqrt[3]{478928}$

$$\log 478928 = 5,6802702$$
$$\log x = 1,8934234$$
$$x = 78,23902.$$

2° Calculer $x = \sqrt[3]{0,054327}$

$$\log 0,054327 = \bar{2},7350157$$
$$\log x = \bar{1},5783386.$$

Afin de rendre la caractéristique négative divisible par 3, je retranche et j'ajoute une unité, et je suppose le logarithme écrit sous la forme

$$-3 + 1,7350157.$$

En divisant par 3 la partie négative et la partie positive, on a

$$-1 + 0,5783386 = \bar{1},5783386.$$

3° Calculer $x = \sqrt[5]{0,0000098763}$

$$\log 0,0000098763 = \bar{6},9945943$$
$$\log x = \bar{2},9989189$$
$$x = 0,09975137.$$

Je suppose le logarithme écrit sous la forme

$$-10 + 4,9945943,$$

afin de rendre la partie négative divisible par 5. En divisant par 5 les deux parties, on a

$$-2 + 0,9989189 = \bar{2},9989189.$$

225. *Remarques sur les accroissements des logarithmes.* En examinant dans les tables la colonne des différences, on voit ces différences aller sans cesse en diminuant. Par exemple, les logarithmes des nombres 486 et 487 diffèrent

entre eux de 8927 unités du septième ordre, tandis ceux des nombres 48624 et 48625 ne diffèrent plus qu 89 unités du même ordre. Il est facile d'expliquer la ca de cette diminution. Soient a et $a+1$ deux nombres tiers consécutifs, la différence de leur logarithmes est

$$\log(a+1) - \log a = \log\frac{a+1}{a} = \log\left(1+\frac{1}{a}\right);$$

or, à mesure que a augmente, $1+\frac{1}{a}$ diminue et tend vers l'unité : la différence tabulaire diminue donc et tend vers zéro. Si l'on prolongeait les tables indéfiniment, cette d rence deviendrait infiniment petite.

Je donne au nombre a un accroissement constant q conque h; l'accroissement du logarithme

$$\log(a+h) - \log a = \log\left(\frac{a+h}{a}\right) = \log\left(1+\frac{h}{a}\right)$$

sera d'autant plus petit que a sera plus grand. Ainsi, p un même accroissement *absolu* donné au nombre, l'acci sement du logarithme diminue à mesure que le non augmente. Mais si l'on donnait au nombre un même acci sement *relatif* (j'entends par accroissement relatif le r port de l'accroissement absolu au nombre lui-même; nombre, par exemple, éprouve un accroissement relati $\frac{1}{1000}$ si on l'augmente de la $\frac{1}{1000}$ partie de sa valeur), l croissement du logarithme serait constant. En désign par k l'accroissement relatif, $k=\frac{h}{a}$, l'accroissement du garithme devient $\log(1+k)$; c'est une quantité consta si l'accroissement relatif reste le même.

226. Dans la recherche des logarithmes des nomb on a supposé les accroissements du logarithme proj

tionnels à ceux du nombre; cette proportion n'est pas exacte. En effet, si l'on donne au nombre a l'accroissement h, le logarithme subit un certain accroissement; si l'on donne au nombre $a+h$ le même accroissement h, le logarithme subit un nouvel accroissement plus petit que le premier; ainsi, quand l'accroissement du nombre devient double, l'accroissement du logarithme est un peu moindre que le double; et réciproquement, quand l'accroissement du nombre devient moitié, l'accroissement du logarithme est un peu plus grand que la moitié. L'emploi de la proportion donne donc dans le passage des nombres aux logarithmes des résultats un peu trop faibles, et dans le passage des logarithmes aux nombres des résultats un peu trop forts.

Mais si l'on a soin d'employer toujours la partie la plus élevée des tables, l'erreur commise sur les logarithmes n'affectera pas les unités du septième ordre décimal; et en effet, dans les tables de Callet, on voit que la même différence tabulaire existe entre plusieurs couples de logarithmes consécutifs. Par exemple, du nombre 68595 au nombre 69744 la différence tabulaire est la même. Dans cet intervalle, pour une unité d'augmentation dans le nombre, le logarithme subit un accroissement constant 63; pour deux, trois... unités d'augmentation dans le nombre, le logarithme subit donc un accroissement deux, trois... fois plus grand, et par conséquent les accroissements du nombre sont proportionnels à ceux du logarithme, du moins au degré d'approximation des tables.

CHAPITRE IV.

DES INTÉRÊTS COMPOSÉS.

---

227. Ordinairement les intérêts d'un capital prêté s payent chaque année et constituent une rente ; mais il arriv quelquefois qu'on laisse les intérêts s'ajouter au capital, d manière que le capital s'accroisse d'année en année : c'e là ce qu'on appelle *capitaliser* les intérêts, ou placer à *inté-rêts composés.*

On a appelé *taux* de l'intérêt ce que rapportent 100 franc dans un an ; mais dans le calcul des intérêts composés, est plus commode de prendre pour taux l'intérêt de *un* fran en un an, intérêt que pour abréger nous désignerons par l lettre r. Ainsi, placer à 5 pour 100, c'est la même cho que placer à 0,05 pour 1 ; dans ce cas $r = 0{,}05$; placer 4,50 pour 100, c'est la même chose que placer à 0,0 pour 1 ; dans ce cas, $r = 0{,}045$.

228. Le capital *un* franc, augmenté de son intérêt, va après une année, $1 + r$; un capital 2460 francs vaud 2460 fois plus, c'est-à-dire $(1 + r) \times 2460$ ou $2460\,(1 +$ En général, si l'on représente par a un capital quelconq sa valeur au bout d'un an, par l'addition des intérêts, se $a(1 + r)$. Ainsi, *on obtient la valeur d'un capital après u année en multipliant ce capital par l'unité augmentée l'intérêt de un franc.*

Par exemple, le capital 2460 francs placé à 5 pour 1 vaut au bout d'un an $2460 \times 1{,}05 = 2583$.

pose maintenant que le capital a soit placé pen-
nées. Après une année ce capital devient $a(1+r)$;
capital dû à la fin de la première année et qui pro-
êt pendant la seconde année. Pour avoir ce que
capital $a(1+r)$ par l'addition des intérêts de la
nnée, il faut le multiplier par $1+r$, ce qui fait
$1+r)$ ou $a(1+r)^2$; tel est le capital dû à la fin
onde année, et qui produit intérêt pendant la troi-
iée. Pour savoir ce que devient ce capital $a(1+r)^2$,
ition des intérêts de la troisième année, il faut le
r par $1+r$, ce qui fait $a(1+r)^2(1+r)$ ou $a(1+r)^3$;
capital dû à la fin de la troisième année, et qui pro-
êt pendant la quatrième année. Le même raison-
eut être continué indéfiniment; et comme chaque
uvelle introduit un nouveau facteur $1+r$, la va-
apital, après n années, sera $a(1+r)^n$. Ainsi, *on
a valeur d'un capital, placé à intérêts composés,
certain nombre d'années, en multipliant ce capital
leur d'un franc après un an, élevée à une puissance
par le nombre des années.*

c l'on désigne par A la valeur du capital après n
on a la formule générale

$$A = a(1+r)^n.$$

formule établit une relation entre les quatre quan-
résentées par a, A, n, r, relation qui détermine
alconque d'entre elles, quand on connaît les trois
On peut donc, à l'aide de cette relation, résoudre
res questions suivantes.

Problème I. *Quelle est la valeur d'un capital placé
ts composés, au taux* r, *après* n *années?*

la question traitée précédemment : on calculera A
rithmes.

Exemple. Trouver la valeur du capital 12540 francs placé à intérêts composés, à 5 pour 100, après 7 ans.

Je suppose dans tout ce qui suit que l'on opère avec les tables de Callet.

$$\log 12540 \ldots\ldots\ldots = 4,0982975$$
$$\log 1,05 = 0,02118930$$
$$7 \log 1,05 \ldots\ldots\ldots = 0,1483251$$
$$\log A \ldots\ldots = 4,2466226$$
$$A = 17645,04.$$

230. Problème II. *Quel est le capital qui, placé à intérêts composés, au taux* r, *acquiert après* n *années une valeur* A?

La formule précédente donne

$$a = \frac{A}{(a+r)^n}.$$

Exemple. Quel est le capital qui, placé à intérêts composés, à 4,75 pour cent, vaut 24600 francs, après 12 années?

$$\log 24600 \ldots\ldots\ldots = 4,3909351$$
$$\log 1,0475 = 0,0201540$$
$$12 \log 1,0475 \ldots\ldots\ldots = 0,2418480$$
$$\log a \ldots\ldots = 4,1490871$$
$$a = 14095,70.$$

231. Problème III. *A quel taux faut-il placer un capital a, à intérêts composés, pour qu'après* n *années il acquière une valeur* A? L'inconnue ici est r; de la formule fondamentale on déduit

$$1 + r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}.$$

On calculera de cette manière la quantité $1 + r$; retranchant 1 du résultat, on aura r.

MPLE. A quel taux faut-il placer le capital 14095,70 u'après 12 années il vaille 24600 francs?

$$\log 24600 \ldots\ldots\ldots\ldots = 4,3909351$$
$$\log 14095,70 \ldots\ldots\ldots = 4,1490867$$

$$\log A - \log a = 0,2418484$$
$$\log(1+r) = 0,0201540$$
$$1 + r = 1,0475,$$
$$r = 0,0475.$$

placer le capital à 4,75 pour 100.

, PROBLÈME IV. *Pendant combien d'années faut-il placer ital* a, *au taux* r, *à intérêts composés, pour qu'il ac- une valeur* A?

connue est n; de la formule fondamentale, on déduit

$$(1+r)^n = \frac{A}{a},$$

prenant les logarithmes,

$$n \log(1+r) = \log A - \log a;$$

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}.$$

REMARQUE. La formule des intérêts composés a été dans l'hypothèse où le capital reste placé pendant nbre entier d'années. Lorsque le capital reste placé it un certain nombre d'années, plus une fraction e, on cherche d'abord sa valeur après le nombre en- nnées par la formule des intérêts composés, puis on les intérêts simples de ce nouveau capital pendant ion d'années.

il sera plus simple d'appliquer la formule ordinaire

$$A = a(1+r)^n,$$

dans laquelle on donnera à n des valeurs fractior différence des résultats est négligeable.

EXEMPLE I. Quelle est la valeur du capital 125 placé à intérêts composés à 5 pour 100, après 7 ai

Après 7 ans, le capital devient 17645,04; c capital rapporte 588,17 en 8 mois : donc après 7 a le capital devient 18233,20.

En donnant à n la valeur fractionnaire $7+\frac{8}{12}$, 18228,40; la différence est 4,80; c'est une qua tivement très-petite; elle est plus petite que le grandeur cherchée.

EXEMPLE II. Pendant combien d'années faut-il capital à intérêts composés à 5 pour 100, pour quière une valeur double?

Comme la grandeur du capital n'a aucune influ la question, je suppose qu'il s'agisse du capital 10

$$n=\frac{\log 2}{\log 1,05};$$

$\log 2 \quad = 0,3010300$	$\log 0,30103 \quad = 1,$
$\log 1,05 = 0,0211893$	$\log 0,0211893 = \bar{2},$
	$\log n = 1,$

$$n = 14,207.$$

Après 14 années le capital n'est pas encore dou 15 années il est plus que doublé. Après 14 ann pital 1000 francs devient 1979,93; si l'on che combien de jours le capital 1997,93 produira ce q pour que le capital primitif soit doublé, c'est-à-d on trouve 74 jours. Ainsi à 5 pour 100, le capital en 14 ans 74 jours.

Si l'on prend la valeur fractionnaire $n = 14,2$ par le calcul, on trouve 14 ans 75 jours. La différ que d'un jour.

EXEMPLE III. A quel taux faut-il placer un capital de 12 000 francs à intérêts composés, pour qu'il acquière une valeur de 18000 francs après 9 ans 5 mois?

Dans la formule des intérêts composés, on donnera à n la valeur fractionnaire $9+\frac{5}{12}$. Il serait très-difficile de résoudre autrement la question.

234. PROBLÈME V. On a deux billets, l'un d'une somme a payable dans 1 an; l'autre d'une somme b payable dans 5 ans, et on veut les convertir en un seul payable dans 3 ans.

Cherchons la valeur de chacun des deux billets dans 3 ans à l'échéance du troisième billet. A cette époque, 2 ans après son échéance, le premier billet vaudra

$$a(1+r)^2;$$

à cette même époque, 2 ans avant son échéance, le second billet vaut

$$\frac{b}{(1+r)^2}.$$

Si l'on appelle x la somme qui doit être inscrite sur le troisième billet, c'est-à-dire la somme à toucher dans 3 ans, on aura

$$x=a(1+r)^2+\frac{b}{(1+r)^2}.$$

235. PROBLÈME VI. *La population d'un État est de 40 millions d'habitants, elle s'accroît chaque année de $\frac{1}{300}$ de sa valeur; on demande quelle sera la population de cet État dans un siècle.*

J'appelle P la population après un certain nombre d'années; l'année suivante elle sera

$$P+\frac{P}{300}=P\times\left(1+\frac{1}{300}\right)=P\times\frac{301}{300}.$$

Ainsi la population croît année par année, comme les t
d'une progression géométrique dont le premier terr
40 millions et la raison $\frac{301}{300}$. On demande le 101° terr
la progression : en désignant par x ce terme, on a

$$x = 40000000 \times \left(\frac{301}{300}\right)^{100}.$$

$$x = 55793600.$$

236. PROBLÈME VII. *Les populations de deux États l'une de 20 millions d'habitants, l'autre de 30 millio première s'accroît chaque année de $\frac{1}{200}$, la seconde d Dans combien de temps les deux populations seron égales?*

J'appelle n le nombre d'années cherché ; après ce nc d'années, les deux populations étant égales, on aura

$$20000000 \times \left(\frac{201}{200}\right)^n = 30000000 \times \left(\frac{301}{300}\right)^n :$$

d'où

$$2 \times \left(\frac{201}{200}\right)^n = 3 \times \left(\frac{301}{300}\right)^n,$$

$$\left(\frac{201 \times 300}{200 \times 301}\right)^n = \frac{3}{2},$$

$$\left(\frac{603}{602}\right)^n = \frac{3}{2};$$

si l'on prend les logarithmes, il vient

$$n(\log 603 - \log 602) = \log 3 - \log 2,$$

$$n = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 603 - \log 602};$$

$n = 244$ ans et une fraction.

QUESTIONS D'ANNUITÉS.

237. PROBLÈME VIII. *Une personne place chaque année une somme* a *pendant* n *années, et laisse les capitaux et les intérêts s'accumuler. On demande quelle sera la valeur totale de tous ces placements après ces* n *années?*

Le premier versement, étant placé pendant n années, acquiert une valeur égale à $a(1+r)^n$; le second, étant placé pendant $n-1$ années, acquiert une valeur égale à $a(1+r)^{n-1}$, etc. ; enfin le dernier, ne restant placé que pendant un an, vaut $a(1+r)$. La valeur totale après les n années est donc

$$a(1+r)+a(1+r)^2.....+a(1+r)^n;$$

c'est la somme des termes d'une progression géométrique dont la raison est $1+r$; cette somme égale

$$A=\frac{a(1+r)^{n+1}-a(1+r)}{r}=\frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}.$$

Il est impossible de soumettre directement cette formule au calcul logarithmique ; on est obligé de faire deux calculs séparés. On calculera d'abord la quantité $(1+r)^n$, puis A.

EXEMPLE : On place chaque année 1000 francs pendant 20 ans à 5 pour 100.

$$A = 1000\,\frac{1{,}05(1{,}05^{20}-1)}{0{,}05}=21000\times(1{,}05^{20}-1).$$

Calcul de $1{,}05^{20}$.

$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$
$20 \log 1{,}05 = 0{,}4237860$
$1{,}05^{20} = 2{,}6533$

Calcul de A.

$\log 21000 = 4{,}3222193$
$\log 1{,}6533 = 0{,}2183517$
$\log A = 4{,}5405710$
$A = 34719^f{,}30$

238. Problème IX. *Une personne emprunte actuellem une somme* A, *et voudrait se libérer en* n *années par* n *p ments égaux effectués à la fin de chaque année. On dem quel doit être le montant de chacun des payements ?*

Je désigne par x le montant de chaque payement e suppose qu'on règle les comptes à fin de la n^e année ; somme due est alors $A(1+r)^n$. Le premier verseme ayant été fait $n-1$ années auparavant, vaut, au mom du règlement, $x(1+r)^{n-1}$; le second versement, ay été fait $n-2$ années auparavant, vaut $x(1+r)^{n-2}$, ainsi de suite ; l'avant-dernier versement, ayant été fai y a un an, vaut $x(1+r)$; enfin le dernier, étant fait moment même, vaut x. La valeur totale des n payeme annuels est donc, au moment du règlement de compte

$$x+x(1+r)+x(1+r)^2\ldots\ldots+x(1+r)^{n-1},$$

ou, en faisant la somme,

$$x\times\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

Pour que la dette soit acquittée, il faut que cette val totale soit égale à la somme due : on a donc

$$x\times\frac{(1+r)^n-1}{r}=A(1+r)^n;$$

d'où

$$x=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

Cette formule présente le même inconvénient que précédente ; il est impossible de la soumettre directem au calcul logarithmique. On calculera d'abord $(1+$ puis x.

Résolution des équations du premier degré *.

Nous allons montrer l'usage qu'on peut faire des logarithmes pour résoudre des équations du premier degré, dans lesquelles les coefficients sont des nombres décimaux.

Soient les trois équations du premier degré à trois inconnues,

$$(1) \qquad 2,543x - 0,667y + 1,402z - 10,640 = 0,$$

$$(2) \qquad 0,048x - 1,430y + 0,586z + 8,235 = 0,$$

$$(3) \qquad 0,867x - 0,687y + 0,432z - 2,928 = 0.$$

On sait que la méthode consiste à éliminer l'une des inconnues en tirant sa valeur de l'une des équations, comme si les deux autres étaient connues, et la substituant dans les deux autres équations. Lorsque les coefficients sont des nombres simples, il est indifférent de résoudre par rapport à l'une ou l'autre des inconnues; mais quand les coefficients sont des nombres décimaux compliqués, il est préférable de résoudre, par rapport à l'inconnue qui est affectée du plus grand coefficient, afin de ne pas augmenter les erreurs. Et en effet, lorsqu'on aura trouvé les valeurs des deux autres inconnues avec une certaine approximation, si l'on substitue ces valeurs dans la formule qui donne la première inconnue, plus le dénominateur sera grand, plus l'approximation sera grande. Au contraire, si ce dénominateur était très-petit, l'erreur serait considérablement augmentée.

Dans l'exemple actuel, de la première équation on tirera la valeur de x,

$$(4) \qquad x = \frac{10,640 + 0,667.y - 1,402.z}{2,543},$$

que l'on substituera dans les deux autres, ce qui donnera

deux équations à deux inconnues,

$$(5)\quad -1,417410y + 0,5595368z + 8,435834 = 0,$$
$$(6)\quad -0,4595958y - 0,0459921z + 0,699557 = 0.$$

De la première de ces deux équations, on tirera la v
de y,

$$(7)\qquad y = \frac{8,435834 + 0,5595368z}{1,417410},$$

que l'on substituera dans la seconde, ce qui donner
quation à une inconnue

$$(8)\qquad -0,2274221z - 2,035765 = 0;$$

d'où

$$z = -\frac{2,035765}{0,2274221} = -8,951482.$$

Portant cette valeur de z dans l'équation (2), on tr

$$y = 2,417897.$$

Portant les valeurs de z et de y dans l'équation
on a

$$x = 9,753328.$$

Pour abréger, on effectuera les calculs à l'aide des lo
rithmes. Comme les mêmes logarithmes servent plusi
fois, il est bon de disposer les calculs de manière que
puisse retrouver sans peine les logarithmes dont o
besoin. Voici la disposition que l'on peut adopter :

Tableau du calcul.

(1) $2,543x \quad -0,667y \quad +1,402z \quad -10,640 = 0,$
L..... $0,4053464x - \bar{1},8241258y + 0,1467480z - 1,0269416;$
(2) $0,048x \quad -1,430y \quad +0,586z \quad +8,235 = 0,$
L..... $\bar{2},6812412x - 0,1553360y + \bar{1},7678976z;$
(3) $0,867x \quad -0,687y \quad +0,432z \quad -2,928 = 0,$
L..... $1,9380191x - \bar{1},8369567y + \bar{1},6354837z.$

On a placé au-dessous de chaque équation les logarithmes des coefficients.

De l'équation (1), on tire

$$(4) \qquad x = \frac{10,640 + 0,667.y - 1,402.z}{2,543};$$

Exp. log. de x..... $x = 0,6215952 + \bar{1},4187794y - \bar{1},7414016z$.

On obtient cette expression logarithmique de x en ajoutant $-\log 2,543$ aux logarithmes de 10,640, 0,667, 1,402, que l'on trouve dans le tableau précédent.

On en déduit aisément les expressions logarithmiques de $0,048x$ et de $0,867x$;

$$\text{L..... } 0,048x = \bar{1},3028364 + \bar{2},1000206y - \bar{2},4226428.z,$$

$$\text{L..... } 0,867x = 0,5596143 + \bar{1},3567985y - \bar{1},6794207z.$$

Il suffit pour cela d'ajouter à chacun des termes de l'expression logarithmique de x le logarithme de 0,048 ou de 0,867.

En revenant aux nombres, on a

$$0,048x = 0,2008336 + 0,01253485y - 0,02646322z,$$

$$0,867x = 3,627557 + 0,2274042y - 0,4779921z.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (2) et (3), on obtient les deux équations à deux inconnues

$$(5) \qquad -1,417410y + 0,5595368z + 8,435834 = 0,$$

$$(6) \qquad -0,4595958y + 0,0459921z + 0,699557 = 0.$$

On résoudra ces deux équations de la même manière :

$$-1,417410y + 0,5595368z + 8,435834 = 0,$$

$$\text{L......} -0,1514955y + \bar{1},7478286z + 0,9261280;$$

$$-0,4595958y - 0,0459921z + 0,699557 = 0,$$

$$\text{L......} -1,6623760y - \bar{2},6626833z.$$

De l'équation (5) on tire

$$(7)\qquad y = \frac{8,435834 + 0,55953668z}{1,417410};$$

$$\text{Exp. log.}\ \ldots\ldots\ y = 0,7746325 + 1,5963331z$$

$$\text{L.}\ldots\ 0,4595858y = 0,4370085 + \bar{1},2587091z.$$

En revenant aux nombres, on a

$$0,4595958y = 2,735322 + 0,18143z.$$

Substituant dans l'équation (6), on obtient l'équatio une inconnue .

$$(8)\qquad -0,2274221z - 2,35765 = 0,$$

d'où

$$z = -\frac{2,035765}{0,2274221};$$

$$\log(-z) = 0,3089277 - \bar{1},3568327 = 0,9518950,$$

$$z = -8,951482.$$

En portant $\log(-z)$ dans l'expression logarithmi de y, déduite de l'équation (7), on a

$$\text{L.}\ \ldots\ .\ y = 0,7746325 - 0,5482281,$$

et, en revenant aux nombres,

$$y = 5,951584 - 3,533687 = 2,417897.$$

En portant $\log(-z)$ et $\log y$ dans l'expression logar mique de x, déduite de l'équation (4), on trouve

$$\text{L.}\ \ldots\ .\ x = 0,6215952 + \bar{1},8022172 + 0,6932966,$$

et, en revenant aux nombres,

$$x = 4,184034 + 0,6341869 + 4,935107 = 9,7533279.$$

On obtient ainsi les valeurs des inconnues avec cinq cimales

$$x = 9,75333$$

$$y = 2,41790$$

$$z = -8,95148.$$

Vérification.

.près avoir trouvé les valeurs des inconnues, il est bon .es vérifier en les substituant dans les équations propo-s. Si l'on effectue les multiplications par la méthode égée à 0,00001 près, on trouve

$$24,80272 - 1,61274 - 12,54998 - 10,640 = 0,$$
$$0,46816 - 3,45760 - 5,24556 + 8,235 = 0,$$
$$8,45614 - 1,66110 - 3,86704 - 2,928 = 0.$$

.es premiers membres des équations doivent se réduire es quantités très-petites, et c'est par la petitesse de ces ntités que l'on juge du degré d'approximation des in-nues. Ici, les premiers membres se réduisent exacte-nt à zéro quand on néglige les millionièmes. Ainsi, les miers membres des équations se réduisent à des quantités indres que 0,00001. Il est très-probable, d'après cela, e les valeurs des inconnues sont elles-mêmes approchées 0,00001.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Cᵉ, 26, rue Racine, près de l'Odéon.



LEÇONS

D'ALGÈBRE.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Ce, rue Racine, 26.

LEÇONS
D'ALGÈBRE

CONFORMES

AUX PROGRAMMES OFFICIELS DE L'ENSEIGNEMENT DES LYCÉES,

PAR CHARLES BRIOT,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS,
MAÎTRE DE CONFÉRENCE A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

DEUXIÈME PARTIE,

à l'usage des élèves

DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES ET DES CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

TROISIÈME ÉDITION.

PARIS.

DALMONT ET DUNOD, ÉDITEURS,

Précédemment Carilian-Gœury et Victor Dalmont,

LIBRAIRES DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n° 49.

1859



TABLE DES MATIÈRES.

Cette table des matières est la reproduction du Programme officiel pour la classe de mathématiques spéciales. (Le même programme a été adopté pour l'admission à l'École polytechnique et à l'École normale supérieure.)

CHAPITRE PREMIER.

COMPLÉMENT DES ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE.

CHAPITRE II.

DES PROGRESSIONS ET DES SÉRIES EN GÉNÉRAL.

CHAPITRE III.

FORMULES DU BINÔME ET SES APPLICATIONS.

CHAPITRE IV.

DES LOGARITHMES ET DE LEURS USAGES.

CHAPITRE V.

DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

---

(1) Partir, par exemple, de l'une des formules $\frac{\pi}{4} = \text{arc tang}\,\frac{1}{2} + \text{arc tang}$ $\frac{\pi}{4} = \text{arc tang}\,\frac{1}{3} + \text{arc tang}\,\frac{1}{7}$; $\frac{\pi}{4} = 4\,\text{arc tang}\,\frac{1}{5} - \text{arc tang}\,\frac{1}{239}$, auxque conduit aisément le procédé de Machin rapporté par M. Lacroix dans l'in duction du traité des calculs différentiel et intégral.

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

(1) On ne demandera pas à l'examen la démonstration de ce théorème.

CHAPITRE VII.

DES DIFFÉRENCES.

(1) On ne demandera à l'examen que la démonstration de cet énoncé théorème de Descartes.

CHAPITRE VIII.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES A LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE IX.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLI

(1) Cette question fait partie du programme de géométrie analytique.

Nota. Les renvois à la première partie de l'Algèbre se rapportent 4ᵉ édition.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

EÇONS D'ALGÈBRE.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

COMPLÉMENT DES ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE.

NOTIONS SUR LES NOMBRES INCOMMENSURABLES.

Définition.

1. Lorsqu'on veut mesurer une grandeur, on cherche e commune mesure entre cette grandeur et l'unité. Si, r exemple, la commune mesure est contenue 7 fois dans nité et 4 fois dans la grandeur que l'on veut mesurer, te grandeur, étant égale à 4 fois la septième partie de nité, sera représentée par la fraction $\frac{4}{7}$.

Mais il arrive quelquefois que la grandeur et l'unité n'ad-ttent pas de commune mesure, c'est-à-dire qu'il n'existe de grandeur, si petite qu'elle soit, contenue exac-nent dans la grandeur et l'unité. Dans ce cas, on dit la grandeur est *incommensurable*, et, comme il est im-

possible de la mesurer exactement, on se borne à une éva-
luation approximative. Imaginons l'unité partagée en u
grand nombre de parties égales, par exemple, en mill
parties égales, et cherchons combien la grandeur à mesu
rer contient de ces parties; elle en contient, je suppose
728, plus un reste plus petit que l'une des parties; la gran
deur à mesurer, étant plus grande que $\frac{728}{1000}$, mais plus pe
tite que $\frac{729}{1000}$, sera représentée par l'une ou l'autre de ce
deux fractions, avec une erreur moindre que 1 millième

Si l'on avait partagé l'unité en un million de partie
égales, on aurait obtenu la mesure de la grandeur ave
une erreur moindre que 1 millionième.

Le nombre fractionnaire qui mesure une grandeur incom
mensurable, avec une approximation aussi grande qu'o
veut, s'appelle un *nombre incommensurable.*

2. Les racines des quantités qui ne sont pas puissance
parfaites, donnent aussi naissance à des nombres incom
mensurables. Appelons A un nombre entier non puissanc
n^e parfaite, et plus généralement une fraction ordinaire i
réductible dont les termes ne sont pas des puissances n
parfaites; je dis qu'il n'existe pas de nombre fractionnaire
qui, élevé à la n^e puissance, reproduise exactement A. E
effet, la n^e puissance de la fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^n}{b^n}$; comme o
peut supposer la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible, c'est-à-dire l
deux nombres a et b premiers entre eux, les deux pui
sances a^n et b^n seront aussi premières entre elles et la fra
tion $\frac{a^n}{b^n}$ irréductible. On voit d'abord que cette fracti
irréductible ne peut être égale à un nombre entier A. El

ne peut non plus être égale à une fraction irréductible dont les termes ne sont pas des puissances parfaites; car deux fractions irréductibles ne sont égales que si elles ont leurs deux termes égaux respectivement; la fraction proposée aurait ainsi ses deux termes puissances parfaites, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Mais on peut trouver des nombres fractionnaires $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b}$, qui ne diffèrent entre eux que d'une quantité aussi petite qu'on veut $\frac{1}{b}$ (b étant très-grand), et dont les n^{es} puissances comprennent A. Écrivons en effet la quantité proposée A sous la forme

$$\frac{A \times b^n}{b^n},$$

et désignons par a le plus grand nombre entier dont la n^e puissance soit contenue dans $A \times b^n$; la quantité $A \times b^n$ étant comprise entre a^n et $(a+1)^n$, la quantité $\frac{A \times b^n}{b^n}$ ou A sera évidemment comprise entre

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a+1}{b}\right)^n.$$

Chacun de ces nombres fractionnaires $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b}$, dont la différence est aussi petite qu'on veut, et dont les puissances comprennent la quantité proposée A, est ce que l'on appelle la racine approchée de A; on la désigne par le symbole $\sqrt[n]{A}$.

Il est aisé de voir que ce nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a+1}{b}$

représente, avec une approximation aussi grande qu'on veut, une certaine grandeur incommensurable. Considérons en effet, d'une part, les nombres dont les n^{es} puissances sont inférieures à A; d'autre part, ceux dont les puissances sont supérieures à A, et imaginons les deux séries de grandeurs commensurables de même espèce représentées par ces nombres. Les grandeurs de la première série sont plus petites que celles de la seconde; la différence $\frac{1}{b}$ entre une grandeur $\frac{a}{b}$ de la première série et une grandeur $\frac{a+1}{b}$ de la seconde série peut être rendue aussi petite qu'on veut. On conçoit donc qu'entre ces deux séries de grandeurs commensurables, il existe une grandeur incommensurable unique et déterminée qui en est la limite commune; c'est cette grandeur incommensurable que représente le symbole $\sqrt[n]{A}$.

3. On a vu, en géométrie, plusieurs exemples de grandeurs incommensurables. Ainsi, on a démontré que la diagonale d'un carré est incommensurable par rapport au côté pris pour unité : elle est représentée par le symbole $\sqrt{2}$. De même la circonférence d'un cercle est incommensurable par rapport au diamètre pris pour unité; mais le nombre incommensurable qui mesure la circonférence ne peut, comme le précédent, être obtenu par des extractions de racines; on le désigne par la lettre π.

Calcul des nombres incommensurables.

4. Le calcul des nombres incommensurables n'offre aucune difficulté. Les nombres incommensurables n'étan

autre chose que des nombres fractionnaires approchés, il est clair que les opérations portent sur ces nombres fractionnaires; le résultat sera lui-même un nombre fractionnaire approché, qui représentera, avec une erreur suffisamment petite, une grandeur déterminée, en général incommensurable.

Addition. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'additionner deux nombres incommensurables. Si l'on prend les deux nombres par défaut, puis par excès, on a une première somme plus petite que la seconde; d'ailleurs ces deux sommes diffèrent entre elles aussi peu qu'on veut; donc elles comprennent une grandeur déterminée qu'elles représentent avec une approximation indéfinie. Cette grandeur est la somme des deux grandeurs incommensurables représentées par les nombres incommensurables proposés.

Soustraction. Il en est de même de la soustraction : si on prend le plus grand nombre par défaut, le second par excès; ou, réciproquement, le premier par excès, le second par défaut, on a une première différence plus petite que la seconde, et ces deux différences diffèrent entre elles d'une quantité aussi petite qu'on veut; donc elles comprennent une grandeur qu'elles représentent avec une approximation indéfinie. Cette grandeur est la différence des grandeurs incommensurables que représentent les deux nombres incommensurables proposés.

5. *Multiplication.* Soit à faire le produit de deux nombres incommensurables; par exemple $\sqrt{7} \times \sqrt{5}$. Si l'on prend les deux nombres par défaut, puis par excès, on a un premier produit plus petit que le second; d'ailleurs ces deux produits diffèrent entre eux d'une quantité aussi petite qu'on

veut; donc ils comprennent une grandeur qu'ils repré
tent avec une approximation indéfinie.

Il est clair que le produit de plusieurs nombres in
mensurables ne change pas quand on intervertit l'o
des facteurs; car le produit des nombres fractionn
approchés ne change pas. Ce théorème fondamental ét
aux nombres incommensurables, toutes ses conséque
le sont par là même; ainsi on peut grouper deux
teurs en un seul, décomposer au contraire un facteu
deux, etc.

Division. Si l'on prend le dividende par défaut, l
viseur par excès, ou, réciproquement, le dividende
excès, le diviseur par défaut, le premier quotient
plus petit que le second, et comme leur différence es
finiment petite, ils comprennent entre eux une gran
déterminée qu'ils représentent avec une approxim
indéfinie.

Les propriétés des fractions algébriques, et en gé
toutes les règles de calcul algébrique, subsistent évi
ment quand les lettres désignent des nombres incomm
rables. (Voyez l'*Algèbre*, première partie, livre I.)

DIVISION DES POLYNÔMES.

Cette question a été traitée avec tous les développe
nécessaires dans la première partie de l'algèbre du
au n° 70. Il est inutile d'y revenir.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU 1er DEG A PLUSIEURS INCONNUES.

On développera les calculs relatifs au cas de deux
tions et à celui de trois équations. On fera connaître la

générale pour former le dénominateur commun et pour en déduire les numérateurs. — Discussion complète des formules propres au cas de deux équations.

Nous avons exposé dans la première partie de l'algèbre (nos 117, 118, 119) la résolution de deux équations générales du premier degré à deux inconnues, et nous avons discuté en détail (nos 120 et 121) les formules trouvées. Nous avons opéré aussi (nos 122, 123 et 124) la résolution de trois équations générales à trois inconnues, et nous avons discuté sommairement les formules trouvées (n° 125). Nous nous occuperons actuellement de la résolution d'un nombre quelconque d'équations générales du premier degré renfermant un pareil nombre d'inconnues.

6. Un système de *n* équations générales du premier degré à *n* inconnues peut être mis sous la forme suivante

$$
\begin{array}{l}
ax + by + cz \;\ldots\ldots\; + gu + hv = k, \\
a'x + b'y + c'z \;\ldots\ldots\; + g'u + h'v = k', \\
a''x + b''y + c''z \;\ldots\ldots\; + g''u + h''v = k'', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a^{(n-1)}x + b^{(n-1)}x + c^{(n-1)}z \;\ldots\ldots\; + g^{(n-1)}u + h^{(n-1)}v = k^{(n-1)}.
\end{array}
$$

On appelle *fonction alternée* de plusieurs lettres une expression qui change de signe en conservant la même valeur numérique, quand on permute deux lettres. Le dénominateur

$$ab' - ba',$$

qui se rapporte à deux équations, est une fonction alternée des deux lettres a et b; car si l'on permute ces deux lettres, il devient $ba' - ab'$, et change de signe en conservant la même valeur numérique. De même le dénominateur trouvé

pour trois équations

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'',$$

est une fonction alternée des trois lettres a, b, c; car si l'on permute deux quelconques de ces lettres, le polynôme change de signe en conservant la même valeur numérique.

Les termes d'une fonction alternée se déduisent facilement du premier, en permutant les lettres deux à deux de toutes les manières possibles, et changeant le signe à chaque permutation. En effet, si le polynôme contient le terme $ab'c''$, il doit contenir aussi le terme $-ac'b''$ obtenu en permutant les deux lettres b et c, puisque le polynôme change de signe par la permutation. De même le terme $-ac'b''$ donne le terme $+ca'b''$ par la permutation des deux lettres a et c, etc.

Remarquons que, lorsque dans une fonction alternée on remplace une lettre par une autre, sans remplacer celle-ci par la première, l'expression devient nulle. Remplaçons par exemple, a par b sans remplacer b par a; à un terme quelconque $ab'c''$ correspond, comme nous l'avons dit, un terme $-ba'c''$, obtenu en permutant les lettres a et b; or si a est remplacé par b, ces termes deviennent égaux et de signes contraires; ainsi les termes du polynôme se détruisent deux à deux.

Considérons maintenant le polynôme alterné formé avec les n lettres $a, b, c, \ldots\ldots . g, h$, et ayant pour premier terme

$$ab'c'' \ldots\ldots h^{(n-1)},$$

et représentons par D ce polynôme. Tous les termes contenant la lettre a une fois et seulement une fois, nous pourrons ordonner ce polynôme par rapport à $a, a', \ldots . a^{(n-1)}$,

et l'écrire sous la forme

$$D = Aa + A'a' + A''a'' \ldots\ldots + A^{(n-1)}a^{(n-1)},$$

les quantités A, A',..... ne contenant plus la lettre a, mais les autres lettres b, c,..... h. Nous savons que, si l'on remplace la lettre a par l'une des autres lettres, le polynôme devient nul ; on a donc les relations

$$\begin{aligned}
&Ab + A'b' + A''b'' \ldots\ldots + A^{(n-1)}b^{(n-1)} = 0,\\
&Ac + A'c' + A''c'' \ldots\ldots + A^{(n-1)}c^{(n-1)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Ah + A'h' + A''h'' \ldots\ldots + A^{(n-1)}h^{(n-1)} = 0.
\end{aligned}$$

Cela posé, multiplions les équations proposées, la première par A, la seconde par A', la troisième par A'',....., la dernière par $A^{(n-1)}$ et ajoutons : le coefficient de x sera le polynôme D ; les coefficients des autres inconnues, d'après les relations précédentes, seront nuls ; on aura donc

$$Dx = Ak + A'k' + A''k'' \ldots\ldots + A^{(n-1)}k^{(n-1)},$$

d'où

$$x = \frac{Ak + A'k' + A''k'' \ldots\ldots + A^{(n-1)}k^{(n-1)}}{Aa + A'a' + A''a'' \ldots\ldots + A^{(n-1)}a^{(n-1)}}.$$

Ce mode de résolution s'applique à l'une quelconque des inconnues. Ainsi, le dénominateur commun est le polynôme alterné formé avec les lettres a, b, c,..... g, h, polynôme que nous avons représenté par D ; le numérateur de chaque inconnue s'obtient en remplaçant dans le dénominateur les coefficients de cette inconnue par les seconds membres.

7. *Remarque.* Le dénominateur commun se compose d'un certain nombre de termes qui sont les permutations que l'on peut faire avec les lettres a, b, c,.....h, servant de

coefficients aux inconnues. Ainsi, pour trois inconnues, dénominateur contient six termes, les six permutations trois lettres a, b, c, et nous avons appris (1re partie, n° 1 à former ce dénominateur au moyen des permutations deux lettres.

De même pour quatre inconnues, le dénominateur co tiendra 24 termes, les permutations des quatre lettres b, c, d. On le formera, au moyen du précédent, en mett dans chacun des termes la lettre d à toutes les places droite à gauche, donnant au premier terme de cha groupe le signe du terme qui l'a fourni, et alternant signes dans ce groupe. Voici ce dénominateur :

$$\begin{array}{l}
ab'c''d''' - ab'd''c''' + ad'b''c''' - da'b''c''' \\
- ac'b''d''' + ac'd''b''' - ad'c''b''' + da'b''c''' \\
+ ca'b''d''' - ca'd''b''' + cd'a''b''' - dc'a''b''' \\
- ba'c''d''' + ba'd''c''' - bd'a''c''' + db'a''c''' \\
+ bc'a''d''' - bc'd''a''' + bd'c''a''' - db'c''a''' \\
- cb'a''d''' + cb'd''a''' - cd'b''a''' + dc'b''a'''.
\end{array}$$

La première lettre de chaque terme n'a pas d'accent seconde est affectée d'un accent, la troisième de deux quatrième de trois.

LORSQUE, DANS L'ÉQUATION $ax^2 + bx + c = 0$, a TEND ZÉRO, L'UNE DES RACINES CROÎT INDÉFINIMENT. CA NUMÉRIQUE DES DEUX RACINES QUAND a EST TRÈS-PET

Voyez la première partie, n°s 157 et 158.

ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES AU 2e DEGRÉ.

Voyez la première partie, n°s 177 et 182.

CALCUL DES VALEURS ARITHMÉTIQUES DES RADICAUX.

8. On appelle en général racine n^e d'un nombre positif a, un nombre positif, commensurable ou incommensurable, qui, élevé à la n^e puissance, reproduit le nombre proposé. C'est là ce qu'on entend par *valeur arithmétique* d'un radical; on la désigne par le symbole $\sqrt[n]{a}$. Le nombre n est l'indice du radical. On est convenu de ne pas écrire l'indice quand il s'agit d'une racine carrée : dans ce cas, on sous-entend l'indice 2

Avant d'aborder le calcul des radicaux, nous allons poser quelques lemmes sur les puissances :

LEMME I. *On élève un produit à une certaine puissance en élevant chaque facteur séparément à cette puissance.*

En effet,

$$(abc)^n = abc \times abc \times abc \times \ldots\ldots = a^n b^n c^n.$$

LEMME II. *On élève une fraction à une certaine puissance en élevant les deux termes séparément à cette puissance.*

En effet,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots\ldots = \frac{a^n}{b^n}.$$

LEMME III. *Élever un nombre à deux puissances successives revient à l'élever à une puissance ayant pour exposant le produit des exposants.*

En effet,

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots = a^{mn}.$$

COROLLAIRE I. *On élève un monôme à une certaine puissance en élevant son coefficient à cette puissance et multipliant tous les exposants par l'indice de la puissance.*

Soit à élever à la n^e puissance le monôme $5a^3b^2c$; En vertu des lemmes I et III, on aura

$$(5a^3b^2c)^n = 5^n a^{3n} b^{2n} c^n.$$

COROLLAIRE II. Un monôme est une puisance n^e parfaite lorsque son coefficient est une puissance n^e parfaite et que tous ses exposants sont divisibles par n. Dans ce cas, on obtient la racine n^e du monôme proposé, en extrayant la racine n^e de son coefficient et divisant par n tous les exposants.

Venons maintenant au calcul des radicaux.

9. THÉORÈME I. *Le produit de plusieurs radicaux de même indice égale la racine du produit des quantités placées sous les radicaux.*

Je dis, par exemple, que

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}.$$

Car si l'on élève le premier membre à la n^e puissance, ce qui se fait en élevant chaque facteur à cette puissance, on reproduit la quantité abc; donc ce premier membre est la racine n^e de abc.

10. THÉORÈME II. *Le quotient de deux radicaux de même indice égale la racine du quotient des deux quantités placées sous les radicaux.*

Je dis que

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Car si l'on élève le premier membre à la n^e puissance, ce qui se fait en élevant séparément le numérateur et le dénominateur, on reproduit la fraction $\frac{a}{b}$.

11. Théorème III. *On élève un radical à une certaine puissance en élevant à cette puissance la quantité placée sous le radical.*

On a, en effet, en vertu du théorème I,

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\ldots\ldots = \sqrt[n]{a^m}.$$

12. Théorème IV. *On extrait la racine d'un radical en multipliant l'indice du radical par l'indice de la racine que l'on veut extraire.*

Je dis que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

En effet, si l'on élève le premier membre à la puissance m, on trouve $\sqrt[n]{a}$; si l'on élève ensuite ce résultat à la puissance n, on obtient a; mais ceci revient à élever le premier membre à la puissance mn. Ainsi, le premier membre est une quantité qui, élevée à la puissance mn, reproduit a; c'est donc la racine mn^{e} de a.

13. Théorème V. *On ne change pas la valeur d'un radical quand on multiplie ou quand on divise par un même nombre l'indice du radical et l'exposant de la quantité placée sous le radical.*

Soit le radical

$$\sqrt[n]{a^m}.$$

Je dis qu'en multipliant par un même nombre entier p l'indice n et l'exposant m, on obtient un second radical

$$\sqrt[np]{a^{mp}}$$

égal au premier. En effet, d'après le théorème précédent,

le second radical peut s'écrire

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{mp}}}.$$

Mais

$$\sqrt[p]{a^{mp}} = a^m;$$

donc

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

COROLLAIRE I. On *simplifie* un radical en divisant l' dice et l'exposant par leur plus grand commun divise Ainsi

$$\sqrt[12]{a^{20}} = \sqrt[3]{a^5}.$$

COROLLAIRE II. On réduit plusieurs radicaux au *mê* *indice* en prenant pour indice commun le produit des i dices, ou plus simplement leur plus petit multiple. Cet réduction est nécessaire quand on veut multiplier ou di ser deux radicaux d'indices différents. Ainsi

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} \times \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m}.$$
$$\sqrt[4]{a} \times \sqrt[6]{b} = \sqrt[12]{a^3} \times \sqrt[12]{b^2} = \sqrt[12]{a^3 b^2}.$$

EXPOSANTS FRACTIONNAIRES.

Définition.

14. On a vu que, pour extraire la racine d'une quanti affectée d'un certain exposant, il suffit de diviser l'exp sant par l'indice de la racine, lorsque cette division e possible. Ainsi

$$\sqrt[4]{a^{12}} = a^3.$$

Si, par extension, on applique la même règle dans

s où l'exposant n'est pas divisible par l'indice de la rane, on obtient un exposant fractionnaire. Soit le radil $\sqrt[5]{a^7}$; l'exposant 7 n'étant pas divisible par l'indice 5, est impossible d'extraire la racine; mais si l'on applique règle énoncée plus haut, on est conduit au symbole $a^{\frac{7}{5}}$, ne l'on adoptera comme représentant le radical proposé.

En général, on est convenu de représenter un radical elconque $\sqrt[n]{a^m}$ par le symbole $a^{\frac{m}{n}}$. Le dénominateur de xposant fractionnaire remplace ainsi le signe $\sqrt{\ }$, et les pressions irrationnelles prennent la forme d'expressions tionnelles.

D'après cette convention, les radicaux

$$\sqrt{a} \quad \text{s'écriront} \quad a^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt[3]{a} \qquad a^{\frac{1}{3}}$$
$$\sqrt{a^3} \qquad a^{\frac{3}{2}}$$
$$\sqrt[3]{a^2} \qquad a^{\frac{2}{3}}$$
$$7\sqrt[3]{a^3b^2c} \qquad 7ab^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}.$$

L'emploi des exposants fractionnaires ne sera vraiment ile que s'il est permis de remplacer un exposant fractionire par un autre égal au premier. Or c'est ce qui a lieu fectivement; car multiplier ou diviser par un même mbre les deux termes d'un exposant fractionnaire, reent à multiplier ou diviser par un même nombre l'indice un radical et l'exposant de la quantité placée sous le racal, ce qui, comme on l'a vu plus haut, ne change pas valeur du radical.

On pourra donc, si l'on veut, réduire un exposant frac-

tionnaire à sa plus simple expression. Soit, par exempl le radical $\sqrt[12]{a^{20}}$, qui s'écrit symboliquement $a^{\frac{20}{12}}$; en sim plifiant l'exposant fractionnaire $\frac{20}{12}$, on obtient le sym bole $a^{\frac{5}{3}}$, qui représente le radical $\sqrt[3]{a^{5}}$, égal au premier.

Calcul des exposants fractionnaires.

Nous allons faire voir maintenant que les règles du cal cul des exposants entiers s'appliquent aux exposants frac tionnaires.

15. *Multiplication.* Nous avons démontré que, pour mul tiplier deux puissances entières d'un même nombre, il suf fit d'ajouter les exposants. La même règle s'applique au exposants fractionnaires.

Je dis, par exemple, que

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

En effet, les deux puissances fractionnaires $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{p}{q}}$ r présentent par convention les deux radicaux $\sqrt[n]{a^{m}}$ et $\sqrt[q]{a^{p}}$ pour multiplier ces deux radicaux, on les réduira d'abor au même indice, ce qui donne

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \times a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}.$$

Or ce dernier radical, produit des deux premiers, s'écr

$$a^{\frac{mq+np}{nq}}$$

ou

$$a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},$$

en remarquant que l'exposant $\frac{mq+np}{nq}$ est la somme des deux fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$. On a donc

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Exemples.

$$1^{\circ} \quad a^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{3}{5}} = a,$$

$$2^{\circ} \quad a \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}},$$

$$3^{\circ} \quad a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}},$$

$$4^{\circ} \quad a^{\frac{1}{4}}\, a^{\frac{5}{6}}\, a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{21}{12}} = a^{\frac{7}{4}}$$

16. ***Division.*** La règle de la multiplication étant étendue aux exposants fractionnaires, celle de la division l'est par cela même. Ainsi, pour diviser l'une par l'autre deux puissances quelconques d'un même nombre, il suffira de retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende.

Je dis que

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$

car, si l'on multiplie le quotient par le diviseur, ce qui se fait en ajoutant les exposants, on reproduit le dividende $a^{\frac{m}{n}}$.

Exemples.

$$1^{\circ} \quad \frac{a}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}},$$

$$2^\circ \quad \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a \ ,$$

$$3^\circ \quad \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{6}},$$

$$4^\circ \quad \frac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{1}{12}}.$$

17. *Puissance.* Nous avons démontré que l'on él nombre à deux puissances entières successives en l' à une puissance ayant pour exposant le produit de: sants. Nous allons faire voir que la même règle s'a] aux exposants fractionnaires.

Considérons l'expression

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Cette expression signifie

$$\sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p},$$

ou

$$\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p},$$

Il faut élever la quantité $\sqrt[n]{a^m}$ à la puissance p et] la racine q du résultat. On sait que l'on élève un r: une puissance en élevant à cette puissance la quant cée sous le radical; on a donc

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}.$$

et par suite

$$\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}}.$$

On sait d'autre part que l'on extrait la racine d'un

en multipliant l'indice du radical par l'indice de la racine, ce qui donne

$$\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}.$$

On arrive ainsi à l'égalité

$$\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{p}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}.$$

Le radical $\sqrt[nq]{a^{mp}}$ pouvant être représenté par $a^{\frac{mp}{nq}}$, on a finalement

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}}.$$

L'exposant du résultat est le produit des deux exposants $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$.

Exemples.

1° $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = a^{\frac{3}{2}}$,

2° $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = a$,

3° $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{8}{3}} = a^{2}$.

EXPOSANTS INCOMMENSURABLES.

18. Prenons comme exemple l'expression $a^{\sqrt{2}}$. Soient $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, deux nombres fractionnaires, dont les carrés comprennent 2 ; l'expression $a^{\sqrt{2}}$ désignera la limite commune des deux quantités $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+1}{n}}$, quand la différence $\frac{1}{n}$ devient de plus en plus petite. Mais, pour compléter cette

définition, il faut démontrer que les deux quantités $a^{\frac{m}{n}}$ e

$a^{\frac{m+1}{n}}$ tendent effectivement vers une limite commune : c'es ce que nous ferons voir plus tard, quand nous auron établi quelques propriétés des puissances servant à la défi nition des logarithmes.

Admettant pour le moment l'existence de cette limite nous remarquerons que toutes les règles démontrées pou le calcul des exposants fractionnaires s'étendent évidem ment aux exposants incommensurables.

Ainsi

$$a^{\sqrt{3}}\,a^{\sqrt{2}}=a^{\sqrt{3}+\sqrt{2}},$$

$$\left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}=a^{\sqrt{6}},$$

$$\left(a^{\sqrt{12}}\right)^{\sqrt{3}}=a^{\sqrt{36}}=a^{6}.$$

EXPOSANTS NÉGATIFS.

Définition.

19. Nous savons que pour diviser l'une par l'autre de puissances d'un même nombre, il suffit de retrancher l'e posant du diviseur de l'exposant du dividende, lorsque l'e posant du diviseur est plus petit que celui du dividende.

Si l'on applique la même règle lorsque l'exposant d diviseur est plus grand que celui du dividende, on ol tient un exposant négatif. Soit le quotient $\frac{a^4}{a^7}$; l'exposant d diviseur étant plus grand que celui du dividende, la div sion est impossible; mais, si l'on applique la règle énonc plus haut, on est conduit au symbole a^{-3}; le quotient pr

posé, simplifié, devient $\frac{1}{a^3}$; ainsi le symbole a^{-3} peut être adopté comme représentant le quotient $\frac{1}{a^3}$.

En général, on est convenu de représenter le quotient $\frac{1}{a^m}$, dans lequel l'exposant m est quelconque, entier ou fractionnaire, par le symbole a^{-m}. L'exposant négatif remplace ainsi le signe de la division.

Calcul des exposants négatifs.

Nous allons faire voir que les règles établies précédemment pour le calcul des exposants positifs s'étendent aux exposants négatifs.

20. ***Multiplication.*** Pour multiplier deux puissances d'un même nombre, il suffit d'ajouter algébriquement les exposants, quels que soient ces exposants, positifs ou négatifs.

1° Considérons d'abord le cas où l'un des exposants est positif, l'autre négatif. Soit à multiplier a^m par a^{-n} (m et n étant deux nombres positifs quelconques, entiers ou fractionnaires, ou même incommensurables) ; puisque a^{-n} par convention représente $\frac{1}{a^n}$, on a

$$a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n};$$

mais le quotient $\frac{a^m}{a^n}$ est représenté dans tous les cas, que m soit plus grand ou plus petit que n, par le symbole a^{m-n}; donc

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}.$$

L'exposant du produit est la somme algébriq exposants.

2° Supposons maintenant les deux exposan Soit à multiplier a^{-m} par a^{-n}. Puisque les sym a^{-n} désignent les quotients $\frac{1}{a^m}$ et $\frac{1}{a^n}$, on a

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m \times a^n} = \frac{1}{a^{m+}}$$

Mais cette dernière expression est représenté ou a^{-m-n}. On a donc

$$a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}.$$

L'exposant du produit est encore la somme alg exposants.

Exemples.

1° $a^5 \times a^{-2} = a^3$,

2° $a^{-5} \times a^2 = a^{-3}$,

3° $a^2 \times a^{-2} = a^0 = 1$,

4° $a^{-5} \times a^{-2} = a^{-7}$.

21. *Division.* La règle de la multiplication ét aux exposants négatifs, celle de la division l'(même. Pour diviser l'une par l'autre deux puiss conques d'un même nombre, il suffit de retra briquement l'exposant du diviseur de celui du car, en multipliant le quotient ainsi obtenu par on reproduit le dividende. Remarquons que c à transformer le diviseur en multiplicateur par ment de signe de son exposant.

Exemples.

1° $\dfrac{a^{-3}}{a^{2}} = a^{-3} \times a^{-2} = a^{-5}$,

2° $\dfrac{a^{3}}{a^{-2}} = a^{3} \times a^{2} = a^{5}$,

3° $\dfrac{a^{-3}}{a^{-2}} = a^{-3} \times a^{2} = a^{-1}$,

4° $\dfrac{a^{-3}}{a^{-5}} = a^{-3} \times a^{5} = a^{2}$.

22. ***Puissance.*** Pour élever un nombre à deux puissances successives, il suffit de multiplier entre eux les deux exposants, quels que soient leurs signes.

1° Considérons d'abord le cas où le premier exposant est négatif, le second positif. Soit l'expression $(a^{-m})^{n}$. Puisque a^{-m} représente $\dfrac{1}{a^{m}}$, on a

$$(a^{-m})^{n} = \left(\frac{1}{a^{m}}\right)^{n} = \frac{1}{a^{mn}};$$

mais ce résultat peut être représenté par a^{-mn}; donc

$$(a^{-m})^{n} = a^{-mn}.$$

2° Supposons le premier exposant positif, le second négatif. Soit l'expression $(a^{m})^{-n}$; par convention, cette expression représente le quotient

$$\frac{1}{(a^{m})^{n}},$$

qui est égal à $\dfrac{1}{a^{mn}}$, et qui peut être représenté par a^{-mn}.

Donc

$$(a^m)^{-n} = a^{-mn}.$$

3° Supposons enfin les deux exposants négatil pression $(a^{-m})^{-n}$ représente le quotient

$$\frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{mn}}\right)} = a^{mn};$$

donc

$$(a^{-m})^{-n} = a^{mn}.$$

Ainsi, dans tous les cas, l'exposant du résulta produit algébrique des deux exposants, conformén règle des signes.

Exemples.

1° $(a^{-3})^2 = a^{-6}$,
2° $(a^3)^{-2} = a^{-6}$,
3° $(a^{-2})^{-3} = a^6$.

Tout ce que nous avons dit sur le calcul des e: fractionnaires et négatifs, peut se résumer en deu fondamentales :

1° $a^m \times a^n = a^{m+n}$,
2° $(a^m)^n = a^{mn}$,

m et n désignant des exposants quelconques, en fractionnaires, positifs ou négatifs.

CHAPITRE II.

DES PROGRESSIONS ET DES SÉRIES EN GÉNÉRAL.

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES. SOMMATION DES TERMES.

Voyez la première partie du n° 183 au n° 199.

CE QU'ON APPELLE SÉRIE. CONVERGENCE ET DIVERGENCE.

23. On appelle ***série***, en mathématique, une suite indéfinie de quantités qui se déduisent les unes des autres, suivant une loi déterminée. Ces quantités sont les ***termes*** de la série.

Lorsque la somme des termes de la série tend vers une limite finie et déterminée, on dit que la série est ***convergente***. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est ***divergente***.

Nous désignerons les termes successifs d'une série par

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots$$

et par S_n la somme des n premiers termes :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1}.$$

Si la somme des n premiers termes tend vers une
finie S, lorsqu'on prend un nombre de termes de p
plus grand, la série est convergente; sinon, elle est
gente.

Il importe de bien préciser la définition des série
vergentes. Quand on dit que la somme des termes de
rie tend vers une limite finie et déterminée S, cela s
que l'on peut prendre n assez grand pour que la son
des n premiers termes, et chacune des sommes su
S_{n+1}, S_{n+2}, ..., diffère de la limite S d'une q
moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'elle sc

UNE PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE EST CONVERGENTE,
RAISON EST PLUS PETITE QUE L'UNITÉ; DIVERGENTE,
RAISON EST PLUS GRANDE QUE L'UNITÉ.

24. La progression géométrique, prolongée à l
nous donne un premier exemple de série. Soit a le p
terme, r la raison; la série s'écrit

$$a, \; ar, \; ar^2, \; ar^3, \; \ldots\ldots.$$

La loi de formation de la série est très-simple; on
chaque terme du précédent en le multipliant par un n
constant r.

Si la raison r, en valeur absolue, est plus gran
l'unité, les termes de la série vont en augmentant in
ment; il est clair que, dans ce cas, la somme des
ne peut tendre vers une limite déterminée; la série
vergente.

Si la raison, en valeur absolue, est plus petite que l
les termes de la série diminuent indéfiniment, de m
à devenir plus petits que toute quantité donnée.

avons trouvé pour la somme des n premiers termes (Ire partie, n° 199),

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

Si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand, la quantité $\frac{ar^n}{1-r}$ devenant plus petite que toute quantité donnée, on voit que la somme des termes tend vers une limite finie et déterminée

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

Ainsi, dans ce cas, la série est convergente; cette limite $\frac{a}{1-r}$ est ce que l'on appelle la somme des termes de la série.

Quand la raison r est positive, ainsi que le premier terme a, tous les termes étant positifs, la somme des termes va constamment en augmentant à mesure qu'on en prend un nombre plus grand, et elle se rapproche de plus en plus de la limite S. Quand la raison est négative, la somme est alternativement plus grande et plus petite que la limite S, dont elle se rapproche en oscillant de part et d'autre (*voyez* Ire partie, n° 199).

LES TERMES D'UNE SÉRIE PEUVENT DÉCROÎTRE INDÉFINIMENT SANS QUE LA SÉRIE SOIT CONVERGENTE.

25. Une première condition nécessaire pour qu'une série soit convergente, c'est que ses termes tendent vers zéro. Je vais faire voir, en effet, que, dans toute série convergente, on peut prendre n assez grand pour que le terme u_n et chacun des termes suivants u_{n+1}, u_{n+2},..... soit plus

petit qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit. Puisque la série est convergente, on peut prendre n assez grand pour que chacune des sommes

$$S_n, \; S_{n+1}, \; S_{n+2}, \; \ldots\ldots$$

diffère de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$. Les deux sommes S_n et S_{n+1}, différant de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$, diffèrent entre elles d'une quantité moindre que α; mais la différence de ces deux sommes est le terme u_n de la série; on en conclut que ce terme u_n est plus petit que α. De même, les deux sommes S_{n+1} et S_{n+2}, différant de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$, leur différence, c'est-à-dire le terme u_{n+1} de la série, est moindre que α, et ainsi de suite. Ainsi chacun des termes

$$u_n, \; u_{n+1}, \; u_{n+2}, \; \ldots\ldots$$

est moindre que la quantité donnée α, ce qu'on exprime en disant que les termes de la série tendent vers zéro.

C'est ce qui a lieu dans la progression géométrique décroissante; ses termes deviennent en effet plus petits que toute quantité donnée.

Mais cette condition n'est pas suffisante; les termes d'une série peuvent tendre vers zéro sans que la série soit convergente. Un exemple très-simple mettra cette proposition en évidence. Considérons la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

formée de fractions ayant pour numérateurs l'unité, et pour

minateurs les nombres entiers consécutifs; le terme ral $\frac{1}{n}$ tend vers zéro, et cependant la série est diver-e.

enons, en effet, le troisième et le quatrième terme

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4},$$

mplaçons $\frac{1}{3}$ par la quantité plus petite $\frac{1}{4}$, nous au-

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4},$$

simplement

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}.$$

enons maintenant les quatre termes suivants

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},$$

mplaçons chacun des trois premiers par la quantité petite $\frac{1}{8}$, nous aurons

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

prenant de même les huit termes suivants, et rem-nt chacun d'eux par $\frac{1}{61}$, on aurait

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\;.\;.\;.\;.\;.+\frac{1}{16}>\frac{8}{16}=\frac{1}{2},$$

nsi de suite indéfiniment. Nous formons ainsi une infi-de groupes dont chacun est plus grand que $\frac{1}{2}$; donc la

Ce théorème nous indique le moyen que l'on emploie pour reconnaître si une série est convergente; on compose la série proposée à une autre déjà connue et que l'on sait être convergente. La progression géométrique décroissante étant la seule série convergente que nous connaissions jusqu'à présent, c'est aux progressions géométriques que nous comparerons les séries.

29. THÉORÈME III. *Lorsqu'à partir d'un certain rang le rapport d'un terme au précédent est constamment inférieur à un nombre déterminé plus petit que l'unité, la série est convergente.*

Supposons qu'à partir du terme de rang n, le rapport d'un terme au précédent reste constamment inférieur à un nombre déterminé k plus petit que l'unité; je dis que la série est convergente. Faisons abstraction des n premiers termes dont la somme a une valeur finie et bien déterminée et considérons la série

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots\dots$$

formée par les termes suivants.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k;$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k,$$

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < k,$$

$$\dots\dots$$

$$\dots\dots$$

De la première inégalité on déduit

$$u_{n+1} < ku_n.$$

nde donne

$$u_{n+2} < ku_{n+1},$$

l'on remplace le terme u_{n+1} par la quantité plus ku_n, on a *à fortiori*

$$u_{n+2} < k^2 u_n.$$

luit de même de la troisième

$$u_{n+3} < ku_{n+2},$$

remplaçant u_{n+2} par la quantité plus grande $k^2 u_n$,

$$u_{n+3} < k^3 u_n,$$

si de suite.

sulte de là que les termes de la série

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots$$

espectivement moindres que les termes correspon- de la progression géométrique décroissante

$$u_n + ku_n + k^2 u_n + \ldots\ldots$$

a raison k est inférieure à l'unité. En vertu du théo- précédent, on conclut que la série est convergente.

, par exemple, la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

pport du second terme au premier est $\frac{1}{2}$, du troi- au second $\frac{1}{3}$, du quatrième au troisième $\frac{1}{4}$, et ainsi te; ce rapport étant constamment égal ou inférieur à série est convergente.

Quand on prend les n premiers termes de la posée et qu'on néglige les suivants, l'erreur con la limite de la somme des termes de la série (1) es que la limite de la somme des termes de la progre c'est-à-dire moindre que $\frac{u_n}{1-k}$.

30. *Corollaire.* On facilite beaucoup l'applicat théorème par les considérations suivantes. Ordinai rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ d'un terme au précédent tend vers u déterminée, que nous désignerons par λ, lorsque n indéfiniment. Il y a trois cas à distinguer, suivant q mite λ du rapport est inférieure, supérieure, ou égal

1° $\lambda < 1$. Choisissons un nombre arbitraire m miné k, compris entre 1 et λ, c'est-à-dire plus l'unité, mais plus grand que k. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, chant indéfiniment de sa limite λ, restera, à partir tain rang, constamment inférieur au nombre k; vertu du théorème démontré, la série est converg

2° $\lambda > 1$. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, se rapprochant in de sa limite λ, restera, à partir d'un certain rang ment supérieur à l'unité; les termes de la série i en augmentant indéfiniment et la série sera dive

Soit, par exemple, la série

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

dont le terme de rang n est

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots\ldots n}$$

le rapport de ce terme au précédent est

$$\frac{x}{n};$$

ce rapport a pour limite zéro, quand n augmente indéfiniment; donc la série est convergente, quelle que soit la valeur de x.

Si la valeur de x est plus grande que l'unité, les termes commencent par augmenter; mais à partir d'un certain rang plus ou moins éloigné, ils vont en diminuant. Par exemple, si $x = 10 + \frac{1}{2}$, les termes augmentent jusqu'au dixième terme; mais au delà, le rapport devenant plus petit que l'unité, les termes diminuent. A partir du vingtième terme, les termes décroissent plus rapidement que les termes d'une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{2}$.

Considérons encore la série

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots$$

qui a pour terme général

$$\frac{x^n}{n}.$$

Le rapport de ce terme au précédent est

$$\frac{n-1}{n}x \quad \text{ou} \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)x,$$

et a pour limite x, quand n augmente indéfiniment. Ainsi, la série est convergente quand la valeur absolue de x est plus petite que l'unité; divergente, quand elle est plus grande que l'unité.

Si, par exemple, $x = 1,1$, les termes commencent croître à partir du onzième terme et croissent indéfinimei

3° $\lambda = 1$. Quand le rapport d'un terme au précéde tend vers une limite égale à l'unité, il y a ambiguïté; série est, tantôt convergente, tantôt divergente. Le théorèı précédent est insuffisant pour décider la convergence de série; il faut alors recourir à des moyens particuliers.

Exemples.

1° Soit la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots$$

Le rapport du terme général $\frac{1}{n}$ au précédent $\frac{1}{n-}$ est $\frac{n-1}{n}$ ou $1 - \frac{1}{n}$, et a pour limite l'unité. Cette sé est celle que nous avons étudiée au n° 25; à l'aide d groupement convenable des termes, nous avons recoı qu'elle est divergente.

2° Soit la série

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots$$

Le rapport d'un terme au précédent

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

a encore pour limite l'unité, et la question de converge reste indécise. Mais on peut démontrer aisément que série est convergente, en groupant les termes d'une man analogue à celle que nous avons employée dans l'exen précédent. Prenons d'abord le second et le troisième

mes, et remplaçons le troisième $\frac{1}{3^2}$ par une quantité plus grande $\frac{1}{2^2}$, nous aurons

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}.$$

Formons un second groupe avec les quatre termes suivants et remplaçons chacun d'eux par une quantité plus grande $\frac{1}{4^2}$, nous aurons de même

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}<\frac{4}{4^2}=\frac{1}{4}.$$

On formera le troisième groupe avec les huit termes suivants, en remplaçant chacun par le premier d'entre eux, ce qui donne

$$\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}\ldots\ldots+\frac{1}{15^2}<\frac{8}{8^2}=\frac{1}{8},$$

et ainsi de suite indéfiniment. On voit par là que la somme des termes de la série est plus petite que la somme des termes de la progression décroissante

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$$

Donc la série est convergente.

3° Soit la série

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots\ldots$$

Les termes de cette série étant respectivement plus grands que ceux de la série divergente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots,$$

la somme augmente à l'infini, et la série est divergente.

le rapport d'un terme au précédent est ici alternat $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$; il ne tend pas vers une limite déterminé comme il ne surpasse pas la quantité $\frac{1}{2}$ qui est plu que l'unité, la série est convergente.

Il n'est pas nécessaire pour la convergence de qu'à partir d'un certain rang le rapport d'un te précédent reste constamment inférieur à un nom plus petit que l'unité. Prenons comme exemple la p sion décroissante

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\ldots,$$

dont nous permutons les termes deux à deux, ce qu la série

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots$$

Le rapport d'un terme au précédent est ici alte ment 2 et $\frac{1}{2}$; il ne reste pas, à partir d'un certai inférieur à une quantité moindre que l'unité. et ce

sont positifs est convergente, si l'on affecte les termes de signes quelconques, la série reste convergente.

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des séries dont tous les termes sont positifs. Quand les termes sont affectés de signes différents, on examine si la série obtenue, en prenant tous les termes positivement, est convergente; alors on peut affirmer que la série proposée est aussi convergente. Parmi les n premiers termes de la série proposée, les uns sont positifs, les autres négatifs; appelons P_n la somme des termes positifs, Q_n celle des termes négatifs; nous aurons

$$S_n = P_n - Q_n.$$

Mais si l'on prend tous les termes avec le signe $+$, la somme des n premiers termes devient égale à $P_n + Q_n$; cette somme totale conservant une valeur finie, les sommes partielles P_n et Q_n conservent aussi des valeurs finies et tendent vers des limites déterminées P et Q; il est clair que leur différence S_n tend vers une limite égale à $P - Q$. Donc la série proposée est convergente.

Corollaire. Le théorème III peut être étendu aux séries dont les termes sont affectés de signes quelconques. Si à partir d'un certain rang, la valeur absolue du rapport d'un terme au précédent reste constamment inférieure à un nombre déterminé moindre que l'unité, la série est convergente. Et, en effet, nous savons que, dans ce cas, la série formée de tous les termes pris positivement est convergente; donc la série proposée est elle-même convergente.

Séries à termes alternativement positifs et négatifs.

33. Théorème V. *Lorsque les termes d'une série décroissent indéfiniment et sont alternativement positifs et négatifs, la série est convergente.*

Parmi les séries dont les termes sont affectés de
différents, il faut remarquer en particulier celles do
termes sont alternativement positifs et négatifs. Soit

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots\ldots$$

une série de cette sorte; lorsque les termes tenden
zéro et en outre diminuent continuellement, de maniè
chacun soit plus petit que le précédent, on peut af
la convergence de la série.

Si l'on prend un, deux, trois, quatre, ... terme
obtient les sommes successives

$$\begin{aligned} S_1 &= u_0, \\ S_2 &= u_0 - u_1, \\ S_3 &= u_0 - u_1 + u_2, \\ S_4 &= u_0 - u_1 + u_2 - u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Considérons d'abord les sommes composées d'un n
pair de termes; on peut les écrire sous la forme

$$\begin{aligned} S_2 &= (u_0 - u_1), \\ S_4 &= (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3), \\ S_6 &= (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

en groupant les termes deux à deux par des parent
un terme quelconque étant plus petit que le préc
chacune des parenthèses a une valeur positive; ces d

tives; car on a

$$S_3 = S_2 + u_2, \quad S_5 = S_4 + u_4, \quad \ldots\ldots$$

i on les écrit sous la forme suivante

$$S_1 = u_0,$$
$$S_3 = u_0 - (u_1 - u_2),$$
$$S_5 = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ı voit qu'elles vont en diminuant de plus en plus.

On a ainsi deux séries de sommes, qui vont, les premières ı augmentant, les secondes en diminuant. D'ailleurs chaque mme de la seconde série est plus grande que l'une quelcon- ie de celles de la première série; comparons, par exemple, ; sommes S_7 et S_{12}; S_7, étant plus grande que S_{13} qui est ale à $S_{12} + u_{12}$, est évidemment plus grande que S_{12}. ın autre côté, la différence entre deux sommes consé- ives S_n, S_{n+1}, qui est le terme u_n, devient aussi petite 'on veut. On en conclut que ces deux séries de sommes dent vers une même limite S, finie et déterminée.

.es sommes successives, obtenues en prenant un nombre termes de plus en plus grand, sont alternativement ɔ grandes et trop petites, et tendent vers la limite en illant en quelque sorte de part et d'autre.

.a limite S étant toujours comprise entre deux sommes sécutives S_n et S_{n+1}, la différence entre la somme S_n et limite S est moindre que la différence entre les deux ımes consécutives S_n et S_{n+1}, c'est-à-dire moindre que erme u_n. Ainsi, quand on prend les n premiers termes la série, l'erreur commise est moindre que le terme sui- ıt u_n; la somme des termes négligés est une fraction de terme $\pm u_n$ et a même signe que ce terme.

indéfiniment est convergente. Les sommes

$$1$$

$$1 - \frac{1}{2} = 0,5$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0,8333$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0,5833$$

. . . .

sont alternativement trop grandes et trop petites. série converge très-lentement ; car si l'on prend premiers termes, l'erreur étant moindre que le ter vant ou que $\frac{1}{11}$, on n'a qu'un chiffre décimal exact ; prend les cent premiers termes, on a une approx de $\frac{1}{101}$, ou deux chiffres exacts ; etc.

Nous avons vu (n° 32) que, lorsque les terme série sont affectés de termes différents, si la série obtient en prenant tous les termes positivement e vergente, la série proposée est aussi convergent cette condition n'est pas nécessaire. Ainsi la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

2° La série

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots\ldots,$$

converge beaucoup plus rapidement.

Si l'on prend les dix premiers termes, l'erreur commise étant moindre que le terme suivant

$$\frac{1}{1.2\ldots\ldots 12}=0{,}0000000003;$$

on a la somme par défaut avec huit décimales exactes.

34. *Étude de la série*

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

Les deux premiers termes donnent une somme égale à 2. Les termes suivants sont respectivement moindres que les termes de la progression géométrique

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots$$

que l'on obtient en remplaçant chacun des facteurs 3, 4, 5,....... par un facteur plus petit 2, ce qui augmente les fractions ; ainsi, d'après le théorème II, la série est convergente, et la somme des n premiers termes, abstration faite des deux premiers, tend vers une limite moindre que la limite de la somme des termes de la progression, c'est-à-dire moindre que l'unité. La somme totale tend vers une limite comprise entre 2 et 3.

Cette limite est un nombre incommensurable. Supposons, en effet, qu'elle soit égale à une fraction ordinaire $\frac{m}{n}$, on aurait

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

Si nous écrivons d'abord les $n+1$ prèmiers termes, et si

nous mettons les suivants sous la forme

$$\frac{1}{1.2.3.....n}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots\ldots\right],$$

nous aurons

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots..+\frac{1}{1.2.....n}$$

$$+\frac{1}{1.2.....n}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots\ldots\right].$$

Multiplions ensuite tous les termes de l'égalité par le] duit $1.2.3.....n$, le premier membre devient un n(bre entier $1.2.3.....(n-1)m$; les $n+1$ prem termes du second membre deviennent aussi des noml entiers, dont, pour abréger, nous désignerons la son par N; on obtient de la sorte l'égalité

$$1.2.....(n-1)m=\text{N}+\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots.\right.$$

La quantité entre parenthèse est une fraction moir que l'unité; car ses termes sont respectivement moin(que ceux de la progression

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots\ldots$$

obtenue en remplaçant chacun des facteurs $n+2$, $n+$? par le facteur plus petit $n+1$, ce qui augmente chac des fractions; la somme des termes de cette progres étant égale à $\frac{1}{n}$, la quantité entre parenthèse est moir que $\frac{1}{n}$; c'est donc une fraction proprement dite. On a(donc, dans l'égalité précédente, un nombre entier ég un nombre fractionnaire, ce qui est impossible. Ainsi limite vers laquelle tend la somme des termes de la s proposée est un nombre incommensurable compris ent et 3; ce nombre joue un grand rôle en mathématiques: le désigne par la lettre e.

Appelons R le reste de la série, ou l'erreur commise quand on prend les $n+1$ premiers termes,

$$R = \frac{1}{1.2.....n}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots\right];$$

la parenthèse étant moindre que $\frac{1}{n}$, d'après ce qui vient d'être dit, on a

$$R < \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1.2.3.....n}.$$

Ainsi, quand on prend $n+1$ termes, l'erreur commise est moindre que la n^e partie du dernier terme calculé.

Voici le calcul de e avec sept chiffres décimaux.

$$2$$

$$\frac{1}{1.2} = 0{,}5$$

$$\frac{1}{1.2.3} = 0{,}1666\ 6667$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} = 0{,}0416\ 6667$$

$$\frac{1}{1.2.....5} = 0{,}0083\ 3333$$

$$\frac{1}{1.2.....6} = 0{,}0013\ 8889$$

$$\frac{1}{1.2.....7} = 0{,}0001\ 9841$$

$$\frac{1}{1.2.....8} = 0{,}0000\ 2480$$

$$\frac{1}{1.2.....9} = 0{,}0000\ 0276$$

$$\frac{1}{1.2.....10} = 0{,}0000\ 0028$$

$$\frac{1}{1.2.....11} = 0{,}0000\ 0003$$

$$\overline{2{,}7182\ 8184}$$

Les termes se déduisent les uns des autres par divisions successives. Nous avons pris les douze premiers termes; les trois premiers sont exacts, et nous avons calculé les autres avec huit décimales, par défaut ou par excès, de manière que l'erreur commise sûr chacun d'eux soit moindre qu'une demi-unité du huitième ordre décimal; six ont été calculés par excès, trois par défaut. D'ailleurs la somme des termes négligés est moindre que la 11ᵉ partie du dernier terme calculé, et par conséquent moindre aussi qu'une demi-unité du huitième ordre décimal. Pour corriger la somme obtenue, il faudrait donc la diminuer d'une quantité plus petite que 5 unités du huitième ordre décimal, et l'augmenter d'une quantité plus petite que 2 unités du même ordre, ce qui donne

$$e > 2{,}7182\ 8181$$
$$e < 2{,}7182\ 8186;$$

On a ainsi, par défaut, avec sept décimales exactes,

$$e = 2{,}7182\ 818\ .$$

Théorème général.

35. Tous les théorèmes que nous avons démontrés sur la convergence des séries sont compris dans un théorème général qu'il est bon de connaître.

Théorème VI. *Pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire et il suffit que l'on puisse rendre* n *assez grand pour que la somme d'un nombre quelconque de termes même infini à la suite des* n *premiers soit moindre qu'une quantité donnée.*

Soit la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$$

Nous avons désigné par S_n la somme des n premiers ermes,

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_{n-1};$$

enons à la suite un nombre quelconque m de termes et pelons s leur somme

$$s = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} \ldots\ldots + u_{n+m-1};$$

ajoutant cette somme s à la première somme S_n, nous tiendrons la somme S_{n+m} des $n+m$ premiers termes de série. Or, si la série est convergente, on peut prendre n ses grand pour que la somme S_n et la somme S_{n+m} diffènt de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$, et par nséquent diffèrent entre elles d'une quantité moindre que ; la somme s des m termes pris à la suite des n premiers it donc moindre que α, et cela est vrai si grand que soit . Ainsi, dans une série convergente, on peut prendre n ssez grand pour qu'un nombre quelconque de termes, ême infini, pris à la suite des n premiers, aient une mme moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'elle it.

La réciproque est vraie : lorsque cette condition est remlie, la série est convergente. En effet, prenons n tel que somme d'un nombre quelconque de termes à la suite des premiers soit moindre que α en valeur absolue; il est clair ue toutes les sommes

$$S_{n+1}, \; S_{n+2}, \; S_{n+3}, \ldots\ldots,$$

ui se composent des n premiers termes, plus un, deux, ois, ..., termes à la suite, seront comprises entre $S_n - \alpha$ $S_n + \alpha$. Prenons maintenant un nombre plus grand que n', que la somme d'un nombre quelconque de termes à la

suite des n' premiers soit moindre que la quantité
petite que α; les sommes

$$S_{n'+1},\ S_{n'+2},\ S_{n'+3},\ \ldots\ldots$$

seront de même comprises entre $S_{n'}-\alpha'$ et $S_{n'}+$
général, la quantité $S_{n'}-\alpha'$ sera plus grande que
la quantité $S_{n'}+\alpha'$ plus petite que $S_n+\alpha$; et l'on au
resserré l'intervalle qui comprend toutes les somn
vantes. On pourra encore le resserrer davantage et
qu'on voudra, ce qui montre bien clairement l'exist
limite vers laquelle tend la somme des termes de l

Il pourrait arriver cependant que la quantité $S_{n'}$
plus grande que $S_n+\alpha$; mais, comme on sait
sommes $S_{n'+1}$, $S_{n'+2}$, ... sont plus petites que S_n
conserverait cette dernière quantité et l'on dirait
sommes sont comprises entre $S_{n'}-\alpha'$ et $S_n+\alpha$. Il
arriver de même que la quantité $S_{n'}-\alpha'$ fût plus pe
$S_n-\alpha$: dans ce cas, on dirait que les sommes so
prises entre $S_n-\alpha$ et $S_{n'}+\alpha'$. Dans tous les cas,
formé, dans le premier intervalle 2α, un second in
plus petit que le premier et comprenant toutes les
suivantes. Dans le second, on en formera un tr
encore plus petit, et ainsi de suite, ce qui conduit n
rement à une limite.

CHAPITRE III.

FORMULES DU BINOME ET SES APPLICATIONS.

ARRANGEMENTS, PERMUTATIONS ET COMBINAISONS.

Arrangements.

36. Je suppose que l'on ait m objets distincts. On appelle *arrangements* de m objets n à n les différentes dispositions que l'on peut former avec ces m objets, en les prenant n à n de toutes les manières possibles, et les plaçant les uns à côté des autres sur une ligne droite. Deux arrangements diffèrent, par la nature des objets qui les composent, ou seulement par l'ordre dans lequel ils sont placés.

Par exemple, avec les trois lettres a, b, c, prises deux à deux de toutes les manières, on peut former les six arrangements suivants

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

Le premier et le troisième ne diffèrent que par l'ordre des lettres; de même le second et le cinquième, le quatrième et le sixième.

rangements que l'on peut former avec ces m objets
à n de toutes les manières possibles.

On obtient évidemment les arrangements des m
une à une, en prenant chacune d'elles séparément
donne m arrangements

$$a, b, c, \ldots\ldots k.$$

Ainsi

$$A_m^1 = m.$$

Nous obtiendrons les arrangements des m lettres
deux en mettant à la suite de la première lettre a su
vement chacune des autres lettres, à la suite de la s
lettre b successivement chacune des autres, et ainsi d
ce qui donne le tableau suivant :

$$
\begin{array}{l}
ab,\ ac,\ ad, \ldots\ldots, ak, \\
ba,\ bc,\ bd, \ldots\ldots, bk, \\
ca,\ cb,\ cd, \ldots\ldots, ck, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
ka,\ kb,\ kc, \ldots\ldots, kh.
\end{array}
$$

La première ligne horizontale contenant tous les a

contenu dans le tableau est $m(m-1)$; on a donc

$$A_m^2 = m(m-1).$$

De même, si à la suite de chacun des arrangements deux à deux on place chacune des $m-2$ autres lettres, on forme les arrangements trois à trois :

abc, *abd*, ... , *abk*,
acb, *acd*, ... , *ack*,
. . . .
bac, *bad*, ... , *bak*,
. . . .
. . . .

A la suite du premier arrangement *ab* de deux lettres, nous avons écrit chacune des autres lettres *c*, *d*, ... *k*; de même, à la suite du second *ac*, chacune des autres lettres *b*, *d*, ... *k*, etc. On a formé ainsi tous les arrangements trois à trois; car un arrangement de trois lettres se compose nécessairement d'un arrangement de deux lettres suivi d'une autre lettre. Le même arrangement n'est pas répété deux fois; car les arrangements d'une même ligne horizontale diffèrent par la troisième lettre, et deux arrangements de deux lignes différentes par l'arrangement des deux premières lettres. Chaque ligne horizontale contient $m-2$ arrangements, il y a $m(m-1)$ lignes horizontales, autant que d'arrangements deux à deux; donc le nombre des arrangements de m lettres trois à trois est $m(m-1)(m-2)$; on a donc

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2).$$

En continuant le même raisonnement, on arrive à la formule générale

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \ldots \ldots (m-n+1).$$

Le nombre des arrangements de m *objets* n *à* n *est égal au produit de* n *nombres entiers consécutifs décroissants à commencer par* m.

37. Il est bon de s'assurer que la formule précédente, écrite par induction, est générale. Supposons que l'on ait formé les arrangements de m lettres $n-1$ à $n-1$, et que l'on veuille former les arrangements n à n; à la suite de chacun des arrangements $n-1$ à $n-1$, on écrira successivement chacune des $m-n+1$ autres lettres. On obtiendra de la sorte tous les arrangements n à n; car un arrangement de n lettres se compose d'un arrangement de $n-1$ lettres suivi d'une autre lettre. Le même arrangement ne se trouve pas répété deux fois; car deux quelconques des arrangements ainsi obtenus diffèrent par la dernière lettre ou par l'arrangement des $n-1$ premières lettres. Chaque arrangement ancien donnant $m-n+1$ arrangements nouveaux, on a la relation générale

$$A_m^n = A_m^{n-1} \times (m-n+1).$$

On en déduit, en donnant successivement à n les valeurs $2, 3, 4, \ldots\ldots n$,

$$\begin{aligned}
A_m^2 &= A_m^1 \times (m-1) = m(m-1),\\
A_m^3 &= A_m^2 \times (m-2),\\
A_m^4 &= A_m^3 \times (m-3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_m^n &= A_m^{n-1} \times (m-n+1);
\end{aligned}$$

Si l'on multiplie toutes ces égalités entre elles, les facteurs intermédiaires disparaissent, et l'on obtient la formule

$$A_m^n = m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1).$$

Applications.. 1° Quel est le nombre des arrangements de sept lettres trois à trois? c'est le produit de trois nombres entiers consécutifs décroissants, à commencer par 7.

$$A_7^3 = 7.6.5 = 210.$$

2° Combien y a-t-il de nombres composés de deux chiffres significatifs différents? Autant qu'on peut former d'arrangements avec les neuf chiffres signicatifs deux à deux.

$$A_9^2 = 9.8 = 72.$$

3° Combien y a-t-il de nombres composés de cinq chiffres significatifs différents? Autant qu'on peut former d'arrangements cinq à cinq avec les neuf chiffres significatifs.

$$A_9^5 = 9.8.7.6.5 = 15120.$$

Permutations.

38. On appelle *permutations* de m objets les différentes dispositions que l'on peut donner à ces m objets, en les plaçant les uns à côté des autres sur une ligne droite. Chaque permutation contient tous les objets et deux permutations ne diffèrent que par l'ordre des objets.

Ainsi, avec deux lettres a et b, on peut former deux permutations

$$ab,\ ba.$$

Nous désignerons en général par P_m le nombre des permutations de m objets. Il résulte de la définition que les permutations de m objets ne sont autre chose que les arrangements de ces m objets pris tous ensemble, c'est-à-dire m à m; on a donc, suivant la notation habituelle,

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3.2.1,$$

ou, si l'on change l'ordre des facteurs,

$$P_m = 1.2.3.4 \ldots \ldots m.$$

Le nombre des permutations de m *objets égale le produit des* m *premiers nombres entiers.*

Applications. 1° Combien peut-on former de mots de trois lettres avec trois lettres données? C'est le nombre des permutations de trois lettres

$$P_3 = 1.2.3 = 6.$$

2° De combien de manières peut-on disposer dix soldats en ligne? C'est le nombre des permutations de dix objets:

$$P_{10} = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3628800$$

39. Nous avons déduit la formule des permutations de celle des arrangements comme cas particulier. Voici comment on peut établir cette formule directement.

On ne peut évidemment donner qu'une disposition à une lettre *a*; ainsi

$$P_1 = 1.$$

Avec deux lettres *a* et *b*, on peut former deux permutations

$$ab,\ ba,$$

et l'on a

$$P_2 = 1.2.$$

Si, dans chacune des permutations précédentes, on introduit la lettre *c* à toutes les places, à la fin, au milieu, au commencement, on obtient les permutations de trois lettres *a*, *b*, *c*,

$$abc,\ acb,\ cab,$$
$$bac,\ bca,\ cba.$$

On a formé ainsi toutes les permutations de trois lettres

car une permutation de trois lettres se compose d'une permutation des deux premières lettres a et b à laquelle on ajoute la troisième lettre c. La même permutation ne se trouve pas répétée deux fois ; car deux permutations quelconques diffèrent, soit par la place de la lettre c, soit pas la disposition des deux autres. Chacune des permutations précédentes donnant trois permutations nouvelles, on a

$$P_3 = P_2 \times 3 = 1.2.3.$$

De même, si dans chacune des permutations des trois lettres a, b, c, on introduit la lettre d à toutes les places, et il y a quatre places, deux intermédiaires et deux extrêmes, on obtient les permutations des quatre lettres a, b, c, d; chacune des permutations précédentes donnant quatre permutations nouvelles, on a

$$P_4 = P_3 \times 4 = 1.2.3.4.$$

En continuant le même raisonnement, on arrive à la formule générale

$$P_m = 1.2.3 \;.\;.\;.\;.\;.\; m.$$

Combinaisons.

40. On appelle *combinaisons* de m objets n à n les différents groupes que l'on peut former avec ces m objets en les prenant n à n, de toutes les manières possibles, de façon que deux groupes diffèrent au moins par la nature d'un objet. Dans les combinaisons on n'a pas égard à la disposition des objets.

Si l'on a m lettres et que l'on imagine qu'elles représentent des quantités différentes, on peut concevoir les combinaisons de ces m lettres n à n comme les différents

tandis que l'on a six arrangements.

Nous désignerons en général par C_m^n le nombre ‹
binaisons de m objets n à n. La formule des coml
se déduit de celle des arrangements et de celle des
tations. Imaginons en effet les combinaisons de ı
n à n formées. Si nous donnons aux n lettres c
posent chacune de ces combinaisons toutes les
tions possibles, c'est-à-dire si nous permutons ces ı
nous obtiendrons les arrangements des m lettres
Nous aurons ainsi tous les arrangements; car u
gement quelconque est une combinaison dans laq
n lettres qui la composent sont disposées dans uı
ordre; et nous n'aurons pas deux fois le même
arrangements fournis par une même combinaison
par l'ordre des lettres, et ceux qui sont fournis
combinaisons différentes diffèrent au moins par l
d'une lettre. Chaque combinaison donnant un noml
rangements marqué par P_n, on a

$$A_m^n = C_m^n \times P_n;$$

d'où

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P},$$

Applications. Pour appliquer la formule, on écrit d'a-
rd au dénominateur les *n* premiers nombres entiers, puis
écrit au numérateur autant de nombres entiers décrois-
nts, à commencer par *m*.

1° Nombre des combinaisons de 5 objets 2 à 2.

$$C_5^2 = \frac{5.4}{1.2} = 10.$$

2° Nombre des combinaisons de 10 lettres 4 à 4.

$$C_{10}^4 = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210.$$

3° Nombre des combinaisons de 10 lettres 6 à 6.

$$C_{10}^6 = \frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6} = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4.} = 210.$$

4° Le nombre des combinaisons de *m* lettres une à une
st *m*, ce qui est évident *à priori.*

5° Le nombre des combinaisons de *m* lettres *m* à *m* est

$$C_m^m = \frac{m(m-2)(m-3)\ldots\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots\ldots m} = 1.$$

est évident en effet que si l'on prend toutes les lettres,
ne peut former qu'une seule combinaison.

41. *Probabilité.* On appelle *probabilité* d'un événement
rapport du nombre des cas favorables au nombre total
s cas possibles, lorsque tous ces cas sont également
ssibles. Je suppose qu'une urne renferme 12 boules,
blanches et 5 noires. On tire une boule au hasard, et
n demande la probabilité pour chaque couleur. Il y a
cas possibles et également possibles : 7 pour les blan-

ches, 5 pour les noires. La probabilité est donc $\frac{7}{12}$ pour la sortie d'une blanche, $\frac{5}{12}$ pour la sortie d'une noire.

La loterie se composait de 90 numéros; à chaque tirage il en sortait 5 au hasard. Une personne désigne un numéro, par exemple, le numéro 20; si le numéro désigné se trouve parmi les 5 numéros sortants, la personne a gagné; sinon elle a perdu. C'est là ce qu'on appelait prendre un *extrait*. Il est facile d'évaluer la probabilité. Puisqu'on tire 5 numéros à chaque fois, le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 90 numéros 5 à 5,

$$C^5_{89} = \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}.$$

Les cas favorables sont les combinaisons qui contiennent le numéro désigné 20; pour les former, imaginons que l'on ôte ce numéro 20 et que l'on combine les 89 autres numéros 4 à 4, puis que l'on ajoute à chacune de ces combinaisons le numéro 20; on aura de cette manière toutes les combinaisons qui contiennent le numéro 20. Ainsi, le nombre des cas favorables est le nombre des combinaisons de 89 numéros 4 à 4,

$$C^4_{89} = \frac{89.88.87.86}{1.2.3.4}.$$

La probabilité de la sortie d'un numéro désigné ou le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles est le quotient de C^4_{89} par C^5_{90}, soit $\frac{5}{90}$ ou $\frac{1}{18}$. Ainsi, sur 18 cas possibles, il y en a 1 favorable à la personne qui prend l'extrait, et 17 pour la loterie. Il faudrait donc parier 1 contre 17. La loterie, au lieu de 17 fois, ne donnait que 15 fois la mise.

orsqu'on désigne deux numéros, on prend ce qu'on
ılle un *ambe*; si les deux numéros désignés sont tous
: parmi les cinq numéros sortants, on a gagné; sinon
perdu. Les cas favorables sont les combinaisons qui
ennent les deux numéros désignés; on les formerait
ombinant les 88 autres numéros 3 à 3, et ajoutant
acune des combinaisons les deux numéros désignés.
ı, la probabilité de la sortie d'un ambe est le rapport
C^3_{88} à C^5_{90}, soit $\frac{4.5}{90.89}$ ou $\frac{2}{801}$. Il faudrait donc parier 2
re 799 ou 1 contre $399 + \frac{1}{2}$; la loterie ne donnait
270 fois la mise.

ı trouvera de même que la probabilité du *terne* est
$\frac{}{18}$, celle du *quaterne* $\frac{1}{511038}$. La loterie ne donnait
5500 fois la mise pour le terne, 75000 fois pour le
erne.

2. Nous allons démontrer sur les combinaisons deux
rèmes qui nous seront utiles par la suite.

ÉORÈME I. *Le nombre des combinaisons de* m *objets* n
est égal au nombre des combinaisons de ces m *objets*
n *à* m — n.

ipposons en effet que l'on ait m numéros dans une
; si l'on en tire n, il en restera $m - n$ dans l'urne;
i à chaque combinaison de n numéros correspond une
binaison de $m - n$, et réciproquement. On a donc

$$C^n_m = C^{m-n}_m.$$

ı peut d'ailleurs vérifier aisément l'égalité des deux
bres

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n},$$

$$C_m^{m-n} = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(m-n)};$$

car si l'on multiplie les deux termes de la première frac
par le produit $1.2\ldots..(m-n)$, les deux termes de la
conde par $1.2\ldots..n$, les dénominateurs deviennent é
et l'on a au numérateur le produit des nombres entiers
sécutifs de 1 à m; il vient de la sorte

$$C_m^n = C_m^{m-n} = \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2\ldots\ldots n \times 1.2\ldots\ldots(m-n)}$$

Par exemple, le nombre des combinaisons de 5 ol
4 à 4 est égal au nombre des combinaisons de 5 ol
1 à 1, le nombre des combinaisons de 5 objets 3 à 3
égal au nombre des combinaisons 2 à 2.

43. Théorème II. *Le nombre des combinaisons de* m
jets n *à* n *est égal au nombre des combinaisons de* m
objets n *à* n, *plus le nombre des combinaisons de* m
objets n — 1 *à* n — 1.

En effet, les combinaisons de m lettres a, b, c,...
prises n à n, peuvent être distinguées en deux catégo
celles qui ne contiennent pas une certaine lettre k et c
qui la contiennent. La première catégorie se compose
demment des combinaisons des $m-1$ premières lettr
à n. On obtiendra celles de la seconde catégorie en for
les combinaisons des $m-1$ premières lettres $n-1$ à n
et ajoutant à chacune d'elles la lettre k. On a donc

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}.$$

On peut aussi vérifier facilement cette égalité au m
de la formule des combinaisons.

Par exemple le nombre des combinaisons de 7 objets 3 à 3 est égal au nombre des combinaisons de 6 objets 3 à 3, plus le nombre des combinaisons de 6 objets 2 à 2.

DÉVELOPPEMENT DES PUISSANCES ENTIÈRES ET POSITIVES D'UN BINÔME. TERME GÉNÉRAL.

44. On sait que le produit de deux polynômes est égal à la somme des produits obtenus en multipliant chacun des termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur. En général, le produit de plusieurs polynômes est la somme des produits obtenus en prenant de toutes les manières possibles un terme dans chacun des polynômes proposés.

Proposons-nous d'abord d'effectuer le produit des m facteurs binômes

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+h)(x+k),$$

en l'ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x.

Le produit de ces m facteurs binômes est la somme des produits obtenus en prenant de toutes les manières possibles un terme dans chacun d'eux. Si l'on prend les m premiers termes, on obtient le premier terme x^m du produit. Si on prend le second terme a dans le premier facteur binôme, et le premier terme x dans tous les autres, on obtient le produit ax^{m-1} qui est du degré $m-1$; prenant de même le second terme b dans le second facteur binôme et le premier terme x dans tous les autres, on a bx^{m-1}; en un mot, le second terme de l'un quelconque des facteurs binômes, combiné avec les premiers termes de tous les autres, donne au produit un terme en x^{m-1}. Réunissant tous

les autres, nous formerons les termes du degré m
que abx^{m-2}, acx^{m-2}, bcx^{m-2}, etc. Si nous réunis
ces termes, nous voyons que x^{m-2}, mis en facteur
sera multiplié par la somme des combinaisons de
des m lettres a, b,..... k. Désignons par S_2 la som
combinaisons, le troisième terme du produit se

En prenant de même les seconds termes dans t
conques des facteurs binômes et les premiers dan
autres, on formera les termes du degré $m - 3$.
$abcx^{m-3}$, $abdx^{m-3}$, etc. Réunissant ces termes en
et appelant S_3 la somme des combinaisons trois à
lettres a, b,..... k, on obtient le quatrième terme
produit.

En général, si l'on prend les seconds termes da
conques des facteurs binômes et les premiers
$m - n$ autres, on forme les termes du degré m -
nissant ces termes et représentant par S_n la so
combinaisons n à n des n lettres a, b,....., k, on
général $S_n x^{m-n}$ du produit.

Les termes du premier degré s'obtiennent e
les seconds termes dans tous les facteurs binôme

insi le produit des m facteurs binômes se développe de
ianière suivante :

$$x^m + S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} \ldots\ldots + S_nx^{m-n} \ldots\ldots + S_{m-1}x + S_m.$$

5. Supposons maintenant que les quantités $a, b, c \ldots\ldots k$,
nt égales entre elles, le produit des m facteurs binômes

$$(x+a)(x+b)(x+c) \ldots\ldots (x+k),$$

ient $(x+a)^m$. Voyons à quoi se réduit le développe-
it : la somme S_1 des quantités $a, b, c \ldots\ldots k$ se réduit à
puisque chacune de ces quantités devient égale à a et
l y en a m. La lettre S_2 désigne la somme des combi-
ions deux à deux de ces mêmes quantités ; chacune de
combinaisons devient égale à a^2 ; et il y en a un nombre
qué par le nombre des combinaisons de m lettres deux
eux, soit $\frac{m(m-1)}{1.2}$; leur somme S_2 est donc égale à
$\frac{n-1)}{1.2} a^2$. De même S_3 désigne la somme des combinai-
s trois à trois ; chacune de ces combinaisons devenant
le à a^3 et leur nombre étant $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, leur
me égale $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3$.

En général S_n désigne la somme des combinaisons n à n
m quantités $a, b, c \ldots\ldots k$; ces quantités devenant égales
, chacune des combinaisons se réduit à a^n ; leur nombre
nt le nombre des combinaisons de m lettres n à n, on a

$$S_n = \frac{m(m-1)(m-2) \ldots\ldots (m-n+1)}{1.2.3 \ldots\ldots n} a^n.$$

Enfin, le dernier terme ou le produit des m quantités
ales $a, b, \ldots\ldots k$ se réduit à a^m.

connue sous le nom de *formule du binôme*. Elle est fréquemment employée; elle sert à former le dével ment d'une puissance quelconque d'un binôme. Le général, celui qui occupe le $n+1^e$ rang dans le dév pement, est, comme nous l'avons dit,

$$(2)\quad \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}a^n x^{m-n}.$$

Si dans la formule (1) on remplace a par $-a$, on o le développement de $(x-a)^m$,

$$(x-a)^m = x^m - \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} - \ldots\ldots \pm$$

les signes alternent.

46. Remarque I. Dans la formule du binôme, les sants de x vont en diminuant graduellement d'une u ceux de a vont au contraire en augmentant; la somn exposants de a et de x dans chaque terme est constan égale à m.

Le nombre des termes du développement est $m+1$ les exposants de x forment la suite des m premiers bres entiers, plus l'exposant zéro du dernier terme.

nts des extrêmes sont égaux. Si l'on écrit la formule inôme en laissant les lettres qui marquent les nombres ombinaisons, on a

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \ldots \ldots$$
$$+ C_m^{m-2} a^{m-2} x^2 + C_m^{m-1} a^{m-1} x + a^m.$$

remier terme et le dernier ont tous deux pour coeffits l'unité, le second terme et l'avant-dernier ont pour ficients C_m^1 et C_m^{m-1}; mais, en vertu d'un théorème ontré (n° 42), on sait que ces deux nombres sont ıx. De même les troisièmes termes à partir des deux èmes, ont pour coefficients les nombres égaux C_m^2 et ', etc.

8. REMARQUE III. Les coefficients se déduisent les uns autres par une loi très-simple : *Multipliez le coefficient lernier terme obtenu par l'exposant de* x *dans ce terme visez par le rang de ce terme, vous aurez le coefficient erme suivant.*

n effet, nous avons trouvé pour le $n+1^e$ terme du déppement

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots(n-1)n}a^n x^{m-n};$$

erme précédent est

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots\ldots(n-1)}a^{n-1}x^{m-n+1}.$$

déduit le $n+1^e$ terme du précédent en augmentant ne unité l'exposant de a et diminuant d'une unité celui x. Quant au coefficient, on le forme en multipliant le fficient précédent par l'exposant $m-n+1$ de x dans terme précédent, et divisant par n, rang de ce terme.

Exemples.

Il importe de s'exercer à développer rapidement l sance d'un binôme. La règle que nous venons d'ı facilite beaucoup le calcul.

1° $(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7.$

Pour passer du second terme au troisième, il faut plier par 6 et diviser par 2, ce qui revient à mu par 3. Pour passer du troisième terme au quatriè faut multiplier par 5 et diviser par 3; on divisera (21 par 3, ce qui donne 7, et on multipliera par 5, donne 35. Le développement contenant $7+1$ ou 8 t et les termes également distants des extrêmes étant une fois trouvés les quatre premiers, on écrira les autres immédiatement.

2° $(x+a)^8 = x^8 + 8ax^7 + 28a^2x^6 + 56a^3x^5 + 70a^4x^4 + 56a^5x^3 + 28a^6x^2 + 8a^7x + a^8.$

Le développement contient 9 termes; il est nécess calculer les cinq premiers, arrivé au terme $70a^4x^4$, marque que les coefficients se reproduisent.

3° $(x-a)^{11} = x^{11} - 11ax^{10} + 55a^2x^9 - 165a^3x^8 + 330a^4x^7 - 462a^5x^6 + 462a^6x^5 - 330a^7x^4 + 165a$ $- 55a^9x^2 + 11a^{10}x - a^{11}.$

Le nombre des termes étant pair, le dernier ter signe —, et les termes qui ont même coefficient son tés de signes contraires.

4° $(x-a)^{12} = x^{12} - 12ax^{11} + 66a^2x^{10} - 220a^3x^9 + 49$ $- 792a^5x^7 + 924a^6x^6 - 792a^7x^5 + 495a^8x^4 - 220a$ $+ 66a^{10}x^2 - 12a^{11}x + a^{12}.$

Le développement contenant un nombre impair de termes, le dernier a le signe + et les termes qui ont même coefficient sont affectés du même signe.

49. REMARQUE IV. *Les coefficients vont en augmentant du commencement jusqu'au milieu du développement et en diminuant du milieu à la fin.* En effet, le rapport du coefficient du $n+1^e$ terme à celui du terme précédent est, comme nous l'avons dit,

$$\frac{m-n+1}{n}.$$

C'est par ce rapport que l'on multiplie le coefficient du n^e terme pour former celui du $n+1^e$ terme. Les coefficients vont en croissant tant que ce multiplicateur reste supérieur à l'unité; ils vont au contraire en décroissant quand ce multiplicateur devient inférieur à l'unité. Posons donc

$$\frac{m-n+1}{n} > 1,$$

et résolvons cette inégalité par rapport à n, nous aurons

$$n < \frac{m+1}{2},$$

la fraction $\frac{m+1}{2}$ désigne la moitié du nombre des termes du développement; ainsi les coefficients vont en croissant jusqu'au milieu. A partir du milieu, l'inégalité change de sens et les coefficients décroissent.

Il y a deux cas à distinguer : 1° lorsque m est pair, le nombre des termes $m+1$ est impair; il y a au milieu *un* coefficient plus grand que tous les autres. Ainsi dans le développement de $(x+a)^8$, dont nous n'écrivons ici que

les coefficients

$$1,\ 8,\ 28,\ 56,\ 70,\ 56,\ 28,\ 8,\ 1,$$

le coefficient 70 est le plus grand; 2° lorsque m est impair le nombre des termes est pair, il y au milieu *deux* coefficients égaux plus grands que tous les autres. Ainsi dans le développement de $(x+a)^7$, dont les coefficients sont

$$1,\ 7,\ 21,\ 35,\ 35,\ 21,\ 7,\ 1,$$

les deux coefficients 35 du milieu sont les plus grands.

Ce qui précède donne une propriété des combinaisons qu'il est bon de remarquer. On demande, par exemple, de quelle manière il faut combiner huit objets pour avoir le plus grand nombre de combinaisons. Il est clair qu'il faut les combiner 4 à 4; car les coefficients du développement de $(x+a)^8$, à partir du second, sont les nombres de combinaisons que l'on peut former avec 8 objets, en les combinant 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, etc...; le plus grand coefficient étant le cinquième, il en résulte que le nombre des combinaisons des 8 objets 4 à 4 surpasse les autres nombres de combinaisons. De même, avec 7 objets, on obtient le plus grand nombre de combinaisons en les prenant 3 à 3 ou 4 à 4.

50. Remarque V. Si dans le développement de $(x+a)^m$ on fait $x=1$ et $a=1$, chaque terme se réduit à son coefficient, et l'on a

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \ldots\ldots + 1.$$

Ainsi la somme des coefficients du développement est égal à 2^m.

En retranchant le premier coefficient qui ne désigne p un nombre de combinaisons, on en conclut que le nom

tal des combinaisons que l'on peut faire avec m objets, les prenant de toutes les manières possibles, est $2^m - 1$,

$$C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 \ldots\ldots + C_m^m = 2^m - 1.$$

DÉVELOPPEMENT DE $(a + b\sqrt{-1})^m$.

51. Nous avons dit (1re partie, n° 140) que l'on appelle uantité imaginaire une expression de la forme $a + b\sqrt{-1}$ de la forme $a + bi$ (la lettre i étant adoptée pour désier le symbole $\sqrt{-1}$), dans laquelle les lettres a et b eprésentent des quantités réelles quelconques positives ou gatives. On a étendu aux quantités imaginaires les règles linaires du calcul algébrique, comme si la lettre i désiait une quantité réelle, en convenant de remplacer dans résultats i^2 par -1.

D'après cette convention, commençons par former les issances successives de i. On a d'abord $i^2 = -1$. La isième puissance i^3 étant égale à la deuxième i^2 multiplié r i, il vient

$$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i.$$

quatrième étant égale à la troisième multipliée par i, on de même

$$i^4 = i^3 \times i = -i \times i = -i^2 = -(-1) = +1,$$

ainsi de suite

$$i^5 = i^4 \times i = i,$$
$$i^6 = i^5 \times i = i \times i = i^2 = -1.$$

n obtient de la sorte la série des puissances

$$i^0 = +1,\quad i^1 = +i,\quad i^2 = -1,\quad i^3 = -i,$$
$$i^4 = +1,\quad i^5 = +i,\quad i^6 = -1,\quad i^7 = -i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La quatrième puissance i^4 étant égale à i^0, il est clair (les mêmes résultats se reproduisent périodiquement d en 4, et l'on a en général

$$i^{4m} = 1, \quad i^{4m+1} = i, \quad i^{4m+2} = -1, \quad i^{4m+3} = -i.$$

Les puissances paires sont réelles, les puissances impa imaginaires.

52. Si, d'après la convention générale sur le calcul quantités imaginaires, on applique la formule du bin au développement de $(a + bi)^m$, on a

$$(a + bi)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}bi + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}b^2i^2 + \ldots$$

En remplaçant les puissances successives de i par les leurs trouvées précédemment, il vient

$$(a + bi)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}bi - \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}b^2$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3}b^3i + \ldots\ldots;$$

les termes sont alternativement réels et imaginaires. l nissons enfin les termes réels et les termes imagina nous aurons

$$(a + bi)^m = \left[a^m - \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} a^{m-4}b\right.$$
$$+ \left[ma^{m-1}b - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots\right]$$

Dans chaque parenthèse les termes sont alternative positifs et négatifs. Si l'on désigne par A et B les va de ces deux parenthèses, on voit que le développeme $(a + bi)^m$ est une quantité imaginaire de la forme ordi $A + Bi$.

clair que le développement de $(a - bi)^m$ ne diffère de $(a + bi)^m$ qu'en ce que le signe de i est changé. ons trouvé

$$(a+bi)^m = A + Bi;$$

ulte

$$(a-bi)^m = A - Bi.$$

Applications.

$+i)^5 = 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i = -4 - 4i.$
$-i)^5 = -4 + 4i.$
$+2i)^6 = 3^6 + 6.3^5.2i - 15.3^4.2^2 - 20.3^3.2^3i + 15.3^2 2^4$
$6.3.2^5i - 2^6 = -2035 - 828i.$
$-2i)^6 = -2035 + 828i.$

E VERS LAQUELLE TEND $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, QUAND m CROÎT DE TOUTE LIMITE.

Nous allons d'abord démontrer deux lemmes qui rviront dans la question proposée.

e I. *La limite de la somme d'un nombre fini de gran- riables est égale à la somme de leurs limites.* Soient ,.....L, m grandeurs variables qui tendent simul- t vers les limites a, b, c,.....l. Si l'on appelle ....,λ, les différences des grandeurs proposées à ites, on a

$$A = a + \alpha,$$
$$B = b + \beta,$$
$$C = c + \gamma,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$L = l + \lambda.$$

tionnant ces égalités et désignant par S la somme

des grandeurs variables et par s celle des limit

$$S = s + (\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots + \lambda).$$

Appelons p la plus grande des différences α, valeur absolue; leur somme sera moindre que nombre m restant fini, et la quantité p devenan tite que toute quantité donnée, puisque toute rences tendent vers zéro, le produit mp devie plus petit que toute quantité donnée; donc la son vers la limite s.

Lemme II. *La limite du produit d'un nombre teurs variables est égal au produit de leurs limites*

En conservant les mêmes notations que préc nous avons les différences

$$\begin{aligned} A - a &= \alpha, \\ B - b &= \beta, \\ C - c &= \gamma, \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ L - l &= \lambda. \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de la première BC..... L, ceux de la seconde par aC..... L, l par abD...., L,......, enfin de la dernière par b qui donne

$$\begin{aligned} ABC\ldots\ldots L - aBC\ldots\ldots L &= \alpha BC\ldots\ldots L, \\ aBC\ldots\ldots L - abC\ldots\ldots L &= \beta aC\ldots\ldots L, \\ abC\ldots\ldots L - abcD\ldots\ldots L &= abD\ldots\ldots L, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ abc\ldots\ldots kL - abc\ldots\ldots kl &= \gamma ab\ldots\ldots k. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités, on voit que l

intermédiaires se détruisent; il vient

$$ABC.....L - abc.....l = \alpha BC.....L + \beta aC.....L + ...$$

Chacun des produits BC.....L, aC.....L,....., conservant une valeur finie, on voit que le second membre est la somme de m quantités qui tendent vers zéro; donc leur somme tend vers zéro, et le produit ABC.....L a pour limite $abc.....l$.

Mais il est nécessaire, pour que ces propriétés subsistent, que le nombre des parties de la somme, ou le nombre des facteurs du produit, soit fini. Soit, par exemple, la somme des m quantités

$$\frac{a}{m} + \frac{a}{m} + \ldots\ldots + \frac{a}{m};$$

chacune d'elles tend vers zéro quand m augmente indéfiniment; mais le nombre des parties devenant infiniment grand, on ne peut plus dire que la limite de la somme est la somme des limites, ce qui donnerait ici zéro; et en effet cette somme est égale à a.

De même l'expression $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ désigne le produit de m facteurs égaux à $1 + \frac{1}{m}$; chacun de ces facteurs devient égal à l'unité quand m augmente indéfiniment; la limite du produit n'est pas égale au produit des limites, c'est-à-dire à l'unité, parce que le nombre des facteurs devient infini. C'est cette limite que nous nous proposons de déterminer.

54. En développant la puissance $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ par la formule du binôme, il vient

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{m^3} + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}\frac{1}{m^n} + \ldots\ldots$$

$$(1)\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\right.}{1.2.3}$$

$$\ldots\ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots\ldots n}\cdot$$

Si l'on compare ce développement à la séı
(n° 34),

$$(2)\quad e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots\ldots n}$$

on voit que les termes du développement sont
que les termes correspondants de la série, puisq
nominateurs sont les mêmes de part et d'autre,
numérateurs des premiers sont inférieurs à l'
valeur de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ reste donc moindre que le
quelle que soit m. On observe en outre que $\left(1+\right.$
mente à mesure que m augmente ; et; en effet, le
$1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$, ..., qui composent les numér
différents termes du développement, croissant

inée qui ne peut surpasser le nombre e. Nous allons démontrer que cette limite est le nombre e lui-même.

Dans les deux expressions (1) et (2) prenons les $n+1$ premiers termes et considérons les deux sommes

$$A = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots\ldots n},$$

$$E = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}.$$

Nous pouvons rendre n assez grand pour que la somme diffère de sa limite e d'une quantité moindre qu'une quantité donnée $\frac{2}{\alpha}$. Ayant choisi le nombre n de cette manière laissons-le fixe, et donnons à m des valeurs plus grandes que n et de plus en plus grandes. La somme A augmente; comme elle contient un nombre fini de termes, savoir $n+1$, la limite de cette somme, en vertu du lemme I, est égale à la somme des limites de ses différents termes. Le numérateur du troisième terme a évidemment pour limite l'unité; de même celui du quatrième. En général, le numérateur d'un terme quelconque étant le produit d'un nombre fini de facteurs dont chacun se réduit à l'unité, a pour limite, en vertu du lemme II, le produit des limites de ces différents facteurs, c'est-à-dire l'unité. Ainsi, quand m augmente indéfiniment, la somme A tend vers une limite égale à la somme E. On conçoit donc que l'on puisse prendre m assez grand pour que la somme A diffère de sa limite E d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$. On a alors

$e - A < \alpha.$

La quantité $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ étant plus petite que e, ma
grande que A, on a, à plus forte raison,

$$e - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m < \alpha.$$

Puisque l'on peut rendre m assez grand pour que la
de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ diffère du nombre e d'une quantité
qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit, il
que ce nombre e est la limite vers laquelle tend la
de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, quand m augmente indéfiniment.

55. L'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la même
quand α tend vers zéro. Ceci est évident, si la
très-petite α est une fraction de la forme $\frac{1}{m}$, m é
nombre entier très-grand; car, dans ce cas, l'ex
$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ devient $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

L'exposant $\frac{1}{\alpha}$ très-grand sera alors compris entre les deux nombres entiers consécutifs m et $m+1$, de manière que l'on ait

$$m < \frac{1}{\alpha} < m+1.$$

Si dans l'expression proposée $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ on remplace la quantité $1+\alpha$ par la quantité plus grande $1+\frac{1}{m}$ et l'exposant $\frac{1}{\alpha}$ par l'exposant plus grand $m+1$, on augmente la valeur de l'expression, et l'on a

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Au contraire, si l'on remplace la quantité $1+\alpha$ par la quantité plus petite $1+\frac{1}{m+1}$ et l'exposant $\frac{1}{\alpha}$ par l'exposant plus petit m, on diminue la valeur de l'expression, et l'on a

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}.$$

On obtient ainsi les inégalités

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} < (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

ou, par des transformations convenables,

$$\frac{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\frac{1}{m+1}} < (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} \times \left(1+\frac{1}{m}\right)$$

Lorsque la quantité α tend vers zéro, le nombr augmente indéfiniment; chacune des quantités (

$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$ tend vers la limite e; d'aille

viseur $1+\frac{1}{m+1}$, de même que le multiplicate devient égal à l'unité. Les deux quantités extrêm

ainsi vers la même limite e; donc la quantité (1 est comprise entre elles, tend aussi nécessaire cette même limite.

Nous avons supposé dans ce qui précède la qu sitive, supposons-la maintenant négative; en

signe en évidence, on a à considérer l'expression La quantité $1-\alpha$ moindre que l'unité peut se n

la forme $\frac{1}{1+\alpha'}$, α' étant une quantité positive. I

$$1-\alpha=\frac{1}{1+\alpha'}.$$

on déduit

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1+\alpha'}{\alpha'}=1+\frac{1}{\alpha'},$$

et, en substituant,

$$(1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}=\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=(1+\alpha')^{1+\frac{1}{\alpha'}}=(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha'}}\times$$

Quand α' tend vers zéro, la quantité $(1+\alpha')^{\frac{1}{\alpha'}}$ te tandis que le multiplicateur $1+\alpha'$ tend vers l'u

la quantité $(1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$ a pour limite e.

i, quel que soit le signe de α, l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ ers une limite égale à e, quand α tend vers zéro.

SOMMATION DES PILES DE BOULETS.

Pyramide à base carrée.

Considérons une pyramide ayant pour base un carré oulets au côté; sur la base est placé un autre carré ayant $m-1$ boulets au côté, et ainsi de suite jusqu'au sommet formé d'un seul boulet. Le nombre des boulets contenus dans chaque tranche étant un carré parfait le nombre total des boulets contenus dans la pyramide est la des carrés des m premiers nombres entiers.

i une manière très-simple d'obtenir cette somme. Si égalité

$$(m+1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1,$$

ne à m successivement les m valeurs $1, 2, 3, \ldots, m$,

$$2^3 = 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1,$$
$$3^3 = 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1,$$
$$4^3 = 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(m+1)^3 = m^3 + 3.m^2 + 3m + 1;$$

ant la somme et supprimant les nombres 2^3, 3^3, ..., ui se trouvent dans les deux membres, on obtient té

$$m+1)^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + m^2)$$
$$+ 3(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + m) + m.$$

Si, pour simplifier, on désigne, par S_1 la son
m premiers nombres entiers, et par S_2 la soi
leurs carrés, cette égalité s'écrit

$$(m+1)^3 = 1 + 3(S_2 + S_1) + m;$$

d'où

$$3(S_2+S_1) = (m+1)^3 - (m+1) = (m+1)(m^2+$$
$$= m(m+1)(m+2).$$

La somme des m premiers nombres entiers étant l
des termes d'une progression arithmétique, on a

$$S_1 = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Si l'on remplace S_1 par sa valeur, il vient

$$3S_2 = m(m+1)(m+2) - \frac{3m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(}{2}$$

d'où

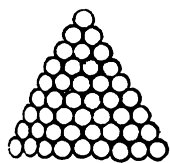
$$(1) \qquad S_2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Telle est la formule qui donne le nombre des bou
tenus dans la pyramide à base carrée. Par exe
$m = 10$, on trouve $S_2 = 385$.

Pyramide triangulaire.

57. Une pile de boulets triangulaire a pour
triangle équilatéral ayant m boulets de côté; sur
est placé un autre triangle ayant $m - 1$ boulets
sur celui-ci un triangle ayant $m - 2$ boulets de
ainsi de suite jusqu'au sommet qui est formé d
boulet.

Chaque triangle est formé de lignes de boulets disposés



comme l'indique la figure; la première ligne contient 1 boulet, la seconde 2, la troisième 3, etc.; de sorte que le nombre des boulets contenus dans un triangle ayant m boulets de côté est la somme des m premiers nombres entiers, c'est-à-dire $\frac{m(m+1)}{2}$. Mais on a

$$\frac{m(m+1)}{2}=\frac{m^2}{2}+\frac{m}{2}.$$

Il en résulte que le nombre total des boulets, contenus dans la pile triangulaire qui a m boulets au côté de la base, est égal à la moitié de la somme des carrés des m premiers nombres, plus la moitié de la somme de ces m premiers nombres. On a donc, en désignant par x le nombre cherché

$$x=\frac{S_2+S_1}{2}.$$

Nous avons trouvé dans le numéro précédent

$$3(S_2+S_1)=m(m+1)(m+2).$$

On en déduit

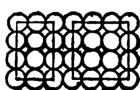
$$(2)\qquad x=\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}.$$

Par exemple, si la pyramide a 8 boulets de côté à la base, elle renferme $\frac{8.9.10}{1.2.3}$ ou 120 boulets.

Pile à base rectangulaire.

58. Imaginons une pile ayant pour base un rectangle de m boulets d'un côté sur n de l'autre, m étant plus grand

que n; sur la base est placé un second rectangle de



boulets sur $n-1$; sur celui-ci u sième rectangle de m — 2 boul $n-2$; et ainsi de suite. On arrive ε n^e rectangle qui a $m-(n-1)$ boulets à l'un de se sur $n-(n-1)$ à l'autre, c'est-à-dire $m-n+1$ c'est une ligne ou arête de $m-n+1$ boulets qui f sommet de la pile.

Si l'on redescend du sommet à la base, on trouve (la file supérieure de $m-n+1$ boulets; au-dessous rectangle composé de 2 files renfermant chacune m – boulets; au-dessous un troisième rectangle renf $3(m-n+3)$ boulets et ainsi de suite. En général tangle de rang k à partir du sommet contient $k(m$ — boulets; mais on a

$$k(m-n+k)=k(m-n)+k^2.$$

Si dans cette égalité on donne à k successivement valeurs 1, 2, 3,...., n, afin d'obtenir les n rectangl se compose la pile, on a

$$\begin{aligned}
1(m-n+1)&=1(m-n)+1^2,\\
2(m-n+2)&=2(m-n)+2^2,\\
3(m-n+3)&=3(m-n)+3^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\\
n(m-n+n)&=n(m-n)+n^2.
\end{aligned}$$

En faisant la somme, on voit que le nombre total d(lets contenus dans la pile rectangulaire est égal à la des carrés des n premiers nombres, plus la somme nombres multipliée par $m-n$. On a donc, en app le nombre cherché,

$$x = S_2 + (m-n)S_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(m-n)\,n(n+1)}{2},$$

ou, plus simplement,

$$(3) \qquad x = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}.$$

Par exemple, si le rectangle de base a 15 boulets d'un côté sur 10 de l'autre, la pile contiendra $\frac{10.11.36}{6}$ ou 660 boulets.

La méthode que nous avons employée revient à décomposer un rectangle quelconque $k(m-n+k)$ en un carré k^2 et un rectangle $(m-n)k$ comme l'indique la figure, et il est à remarquer que ce second rectangle a un côté constant $m-n$, ce qui permet de faire la somme.

Triangle arithmétique.

59. On appelle triangle arithmétique, ou triangle de Pascal, le tableau suivant qui renferme les coefficients des puissances successives du binôme :

1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

La première ligne horizontale renferme les coefficients de la première puissance du binôme $x+a$, la deuxième les coefficients du développement de $(x+a)^2$, la troisième ceux de $(x+a)^3$; en général la m^e ligne horizontale renferme les coefficients du développement de $(x+a)^m$, c'est-à-dire en mettant à part le premier coefficient 1, les nombres de combinaisons de m objets, pris 1 à 1, 2 à 2, etc.

En faisant abstraction de la colonne des unités, on voit que la première colonne verticale contient les nombres de combinaisons une à une de 1, 2, 3,..... objets, la seconde les nombres de combinaisons deux à deux de 2, 3, 4,..... objets; en général la n^e colonne (toujours abstraction faite de celle des unités que l'on ne compte pas) contient les nombres de combinaisons n à n de n, $n+1$, $n+2$,..... objets.

En un mot la m^e ligne horizontale renferme les nombres de combinaisons de m objets, la n^e colonne verticale les nombres de combinaisons n à n. Ainsi le nombre placé à l'intersection de la m^e ligne horizontale et de la n^e colonne verticale est C_m^n.

Chaque nombre du triangle arithmétique égale le nombre placé au-dessus de lui, plus le nombre placé à gauche de ce dernier. Ainsi le nombre 35 de la 7e ligne égale le nombre 20 placé au-dessus de lui, plus le nombre 15 placé à gauche de 20. Ceci résulte de la relation

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1},$$

que nous avons démontrée n° 42; C_{m-1}^n est effectivement placé au-dessus de C_m^n dans la même colonne verticale, et C_{m-1}^{n-1} est placé à gauche de C_{m-1}^n dans la même ligne horizontale.

propriété sert à la formation du tableau : suppo-
:ites les trois premières lignes, on dira 3 et 1 font 4,
font 6, 1 et 3 font 4; écrivant à la suite l'unité, on
quatrième ligne. On dira de même 4 et 1 font 5,
ont 10, 4 et 6 font 10, 1 et 4 font 5, et l'on écrira à
l'unité, ce qui donne la cinquième ligne, et ainsi
e. Chaque ligne horizontale se déduit de la ligne
nte.

Théorème. *La somme des* m *premiers nombres d'une verticale quelconque est le* m*e* *nombre de la colonne e.*

l'autres termes, le *m*e nombre d'une colonne ver-
quelconque est la somme des *m* premiers nombres
olonne précédente; ceci résulte de la loi de forma-
tableau. Considérons, par exemple, le nombre 56,
nombre de la troisième colonne (on fait toujours
tion de la colonne des unités) ; ce nombre égale 21
, mais 35 égale 15 plus 20, 20 égale 10 plus 10,
e 6 plus 4, 4 égale 3 plus 1 ; on a donc

$$56 = 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1;$$

e nombre 56 est la somme des six premiers nombres
euxième colonne.

ispection du tableau on voit que le premier nombre
e colonne verticale se trouve dans la *n*e ligne hori-
; le second dans la $n+1^e$, le troisième dans la
. En général le *m*e nombre de la *n*e colonne ver-
e trouve dans la $m+n-1$ ligne horizontale; c'est

$$C^n_{m+n-1} = \frac{(m+n-1)(m-n-2)\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots\ldots n}.$$

$$(4)\qquad \frac{m(m+1)\ldots\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots\ldots n}.$$

61. Les propriétés du triangle de Pascal permi
trouver immédiatement le nombre des boulets
dans une pile triangulaire, nombre que nous a
obtenu par un autre procédé. La première colon
cale comprend les nombres entiers consécutifs, ou
bres figurés du premier ordre. Un triangle de m b
côté étant formé de m files successives, le nombre
lets contenus dans ce triangle est la somme des m
nombres de la première colonne verticale; c'e
nombre de la seconde colonne, soit, en faisant n =
la formule (4),

$$\frac{m(m+1)}{1.2}.$$

Ainsi les nombres 1, 3, 6,....., de la deuxième
verticale du triangle arithmétique sont les nomb
gulaires, ou les nombres figurés du second or
nombres sont représentés par la formule générale $\frac{m}{}$

Une pile triangulaire de m boulets au côté de
formée de m triangles successifs; si l'on descend du
à la base, on voit que la pyramide est la somme de
miers nombres triangulaires, c'est-à-dire des m
nombres de la deuxième colonne verticale du
arithmétique; c'est le m^e nombre de la troisième
soit, en faisant $n=3$ dans la formule (4),

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}.$$

Ainsi les nombres 1, 4, 10, 20, 35,....., inscrit
troisième colonne verticale sont les nombres pyra

es nombres figurés du troisième ordre. Les nombres de olonne suivante expriment des sommes de pyramides, insi de suite.

près avoir évalué de cette manière la pyramide triangu-, on obtient aisément la pyramide à base carrée.

n peut décomposer le carré de base, comme l'indique gure du n° 56, en deux triangles équilatéraux ayant, le nier m boulets au côté, le second $m-1$; si l'on ima- chaque carré décomposé de la même manière, on que la pyramide carrée est la réunion de deux pyra-es triangulaires ayant, la première m boulets au côté base, la seconde $m-1$. Le nombre des boulets conte- dans la pyramide carrée est donc la somme des nom- de boulets

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+\frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}$$

tenus dans les deux pyramides triangulaires, soit, en plifiant,

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

2. Comme dernière application du triangle arithmé-ie, cherchons la somme des cubes des m premiers nom-s

$$1^3+2^3+3^3\ldots\ldots+m^3.$$

Un cube quelconque m^3 peut s'écrire

$$\begin{aligned}m^3=m(m^2-1)+m&=(m-1)m(m+1)+m\\&=6\,\frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}+m.\end{aligned}$$

nombre $\frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}$ est le $m-1^e$ nombre de la

troisième colonne verticale du triangle arithmétique. La somme des cubes des m premiers nombres égale donc six fois la somme des $m-1$ premiers nombres de la troisième colonne, plus la somme des m premiers nombres. La somme des $m-1$ premiers nombres de la troisième colonne est le $m-1^e$ nombre de la quatrième colonne, soit, en remplaçant m par $m-1$ et n par 4 dans la formule (A),

$$\frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{1.2.3.4}.$$

On a ainsi pour la somme des cubes des m premiers nombres

$$\frac{(m-1)\,m(m+1)(m+2)}{4}+\frac{m(m+1)}{2}=\frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Il en résulte que la somme des cubes des m premiers nombres égale le carré de la somme de ces m premiers nombres.

CHAPITRE IV.

DES LOGARITHMES ET DE LEURS USAGES.

EN FORMANT TOUTES LES PUISSANCES D'UN NOMBRE QUELCONQUE POSITIF, PLUS GRAND OU PLUS PETIT QUE 1, ON PEUT REPRODUIRE TOUS LES NOMBRES.

63. Lemme I. *Les puissances successives d'un nombre plus grand que l'unité vont en croissant et deviennent plus grandes que toute quantité donnée.*

Soit a une quantité positive supérieure à l'unité. On voit d'abord que ses puissances successives vont en croissant; car on obtient a^{m+1} en multipliant a^m par a; le multiplicateur a étant plus grand que l'unité, le produit a^{m+1} est plus grand que le multiplicande a^m. Je dis maintenant que les puissances de a augmentent au delà de toute limite. Posons $a = 1 + \alpha$; en développant $(1 + \alpha)^m$ suivant la loi du binôme, nous aurons

$$a^m = (1 + \alpha)^m = 1 + \frac{m}{1}\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2 + \ldots..$$

Tous les termes du développement sont positifs; si donc on néglige le troisième terme et les termes suivants, on diminue le second membre, et l'on a

$$a^m > 1 + m\alpha.$$

Pour rendre la quantité a^m plus grande qu'une quantité donnée A, il suffit évidemment de rendre la quantité $1 + m\alpha$ plus grande que cette quantité ; on déterminera donc l'exposant m de manière à satisfaire à l'inégalité

$$1 + m\alpha > A\,;$$

d'où

$$m > \frac{A - 1}{\alpha}.$$

Ainsi, lorsque l'exposant m surpasse $\frac{A - 1}{\alpha}$, il est certain que la puissance a^m devient supérieure à la quantité A, si grande qu'elle soit. Donc les puissances successives du nombre a plus grand que l'unité augmentent indéfiniment.

Soit, par exemple, $a = 1,1$; on peut affirmer que a^m surpassera 1000 si m est plus grand que $\frac{999}{0,1}$ ou que 9990. Mais on n'a pas ainsi les plus petites puissances de a supérieures à 1000.

64. Lemme II. *Les puissances successives d'un nombre plus petit que l'unité vont en décroissant et deviennent plus petites que toute quantité donnée.*

Le nombre a, étant inférieur à l'unité, peut être représenté par $\frac{1}{1 + \alpha}$, et l'on a

$$a^m = \frac{1}{(1+\alpha)^m}.$$

and l'exposant m croît indéfiniment, le dénominateur gmentant indéfiniment, la fraction diminue et tend vers 0.

35. Lemme III. *La racine d'un nombre supérieur à l'unité supérieure à l'unité, et l'on peut prendre l'indice du ra- al assez grand pour que la racine diffère de l'unité d'une ntité moindre que toute quantité donnée.*

Soit a un nombre supérieur à l'unité. Je dis d'abord $\sqrt[n]{a}$ surpasse l'unité; car un nombre plus petit que ité, élevé à la n^e puissance, ne pourrait reproduire le nbre a plus grand que l'unité. Nous voulons rendre $\sqrt[n]{a}$ rieure à $1+\alpha$, α étant une quantité donnée très-petite; 'agit donc de satisfaire à l'inégalité

$$\sqrt[n]{a} < 1+\alpha,$$

la suivante

$$(1+\alpha)^n > a.$$

en vertu du lemme I, si petite que soit α, on peut tou- s prendre l'exposant n assez grand pour que $(1+\alpha)^n$ asse a.

n veut, par exemple, que $\sqrt[n]{2}$ diffère de l'unité de s de 0,001. On prendra n plus grand que $\frac{2-1}{0{,}001}$, c'est- re plus grand que 1000.

orollaire. *Toute puissance fractionnaire d'un nombre grand que l'unité est plus grande que l'unité.* Car signifie $\sqrt[n]{a^m}$; le nombre a étant supérieur à l'unité, sa

puissance a^m est supérieure à l'unité, et la racine de cette dernière quantité est aussi supérieure à l'unité.

66. Lemme IV. *Les racines d'un nombre inférieur à l'unité sont inférieures à l'unité, et l'on peut prendre l'indice du radical assez grand pour que la racine diffère de l'unité d'une quantité moindre que toute quantité donnée.*

Si le nombre a est inférieur à l'unité, $\sqrt[n]{a}$ sera aussi inférieure à l'unité ; car un nombre supérieur à l'unité, élevé à la n^e puissance, ne pourrait reproduire le nombre a inférieur à l'unité ; d'autre part, le nombre a, inférieur à l'unité, peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à l'unité, et l'on a

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a'}}.$$

Le dénominateur tendant vers l'unité, quand l'indice n du radical augmente indéfiniment, la fraction tend elle-même vers l'unité.

Corollaire. *Toute puissance fractionnaire d'un nombre plus petit que l'unité est plus petite que l'unité.*

67. Théorème. *La fonction* a^x *varie d'une manière continue, quand* x *croît d'une manière continue.*

On appelle *fonction* en mathématiques une expression qui contient une lettre désignant une quantité variable. L'expression $2x^2 - 4x + 5$ est une fonction entière de la variable x. L'expression a^x est une fonction *exponentielle* de x ; on la nomme ainsi parce que la variable x est en exposant.

Nous supposons le nombre a positif et plus grand que

ité. Je dis d'abord que lorsque la variable x croît, la
tion a^x croît. En effet, si l'on donne à la variable x un
oissement h, la fonction devient a^{x+h}, et éprouve une
ation marquée par

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1).$$

a^h est supérieure à l'unité, parce que toute puissance
nombre a supérieur à l'unité est elle-même supérieure
nité; donc la différence $a^{x+h} - a^x$ est positive, et par
a^{x+h} est plus grande que a^x. Ainsi, quand a est plus
d que l'unité, la fonction a^x croît en même temps que
riable x.

dis maintenant que l'on peut donner à la variable x
accroissement h assez petit pour que la fonction a^x
uve un accroissement plus petit qu'une quantité don-
α. En effet, supposons h plus petit qu'une fraction
a forme $\frac{1}{n}$, n étant un entier très-grand; en vertu du
ne III, on peut prendre n assez grand pour que $a^{\frac{1}{n}}$
$\sqrt[n]{a}$ diffère de l'unité d'une quantité plus petite que $\frac{\alpha}{a^x}$;
uantité a^h, étant moindre que $a^{\frac{1}{n}}$, puisque h est infé-
re à $\frac{1}{n}$, différera de l'unité d'une quantité encore plus
te, et la différence $a^{x+h} - a^x$ sera moindre que $a^x \times \frac{\alpha}{a^x}$
ue α. Ainsi l'accroissement de la fonction peut être rendu
petit qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit; en
tres termes, lorsque l'accroissement de la variable tend
zéro, celui de la fonction tend aussi vers zéro.

n dit qu'une grandeur varie d'une manière continue
qu'elle ne peut aller d'une valeur à une autre sans

passer par toutes les valeurs intermédiaires. Une fonction est *continue* lorsqu'à une variation infiniment petite de la variable correspond une variation infiniment petite de la fonction ; car si la fonction sautait brusquement d'une valeur à une autre, elle éprouverait une variation finie pour une variation infiniment petite de la variable.

Il résulte de ce qui précède que lorsque la variable x croît d'une manière continue, la fonction exponentielle a^x croît aussi d'une manière continue.

Nous avons supposé le nombre positif a plus grand que l'unité. Supposons-le maintenant plus petit, et posons $a = \frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à l'unité. On a

$$a^x = \frac{1}{a'^x}.$$

Lorsque x croît d'une manière continue, a'^x croît, et par conséquent a^x décroît d'une manière continue.

68. Corollaire. Voyons maintenant les valeurs par lesquelles passe la fonction exponentielle a^x quand on fait croître x d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$. Supposons d'abord a supérieur à l'unité, et faisons croître x de o à $+\infty$; pour $x = 0$, on a $a^0 = 1$; quand x est infiniment grand, en vertu du lemme I, a^x est aussi infiniment grand ; ainsi, quand x croît de o à $+\infty$, la fonction a^x croît de 1 à $+\infty$. Faisons maintenant décroître x de o à $-\infty$, et pour cela, posons $x = -x'$, x' étant positive ; on a

$$a^x = \frac{1}{a^{x'}};$$

quand x' croît de o à $+\infty$, $a^{x'}$ croît de 1 à $+\infty$, et par

nséquent a^x décroît de 1 à 0. En résumé, lorsque la va-
ur x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, a
nt supérieur à l'unité, la fonction a^x croît d'une manière
ntinue de 0 à $+\infty$. Il est à remarquer que la fonction
se par toutes les valeurs positives et qu'elle ne passe
'une fois par chacune d'elles, puisqu'elle va constamment
augmentant.

Considérons maintenant le cas où le nombre a est infé-
ur à l'unité, et posons $a = \frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à l'u-
té, ce qui donne

$$a^x = \frac{1}{a'^x}.$$

voit que lorsque x croît de 0 à $+\infty$, a'^x croissant de
à $+\infty$, a^x décroît de 1 à 0, et que, lorsque x décroît de
à $-\infty$, a'^x décroissant de 1 à 0, a^x croît de 1 à $+\infty$.
si, quand x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$,
tant inférieur à l'unité, la fonction a^x décroît d'une ma-
re continue de $+\infty$ à 0. La fonction passe encore par
tes les valeurs positives et une seule fois par chacune
lles.

39. REMARQUE. Nous pouvons maintenant donner d'une
nière très-nette la signification de l'exposant incommen-
able dont nous avons déjà dit quelques mots (n° 18).
it $a^{\sqrt{2}}$, et pour préciser, supposons a supérieur à l'u-
é; le nombre incommensurable $\sqrt{2}$ est la limite com-
ne de deux nombres fractionnaires $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, qui
fèrent entre eux d'une quantité aussi petite qu'on veut,
dont les carrés comprennent 2; en remplaçant $\sqrt{2}$ par
s nombres approchés, on obtiendra deux séries de puis-

sances fractionnaires $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+1}{n}}$, les premières plus petites que les secondes, et telles que leur différence peut être rendue plus petite qu'une quantité donnée ; il existe donc entre ces deux séries de grandeurs une grandeur déterminée qui en est la limite commune ; c'est cette limite que désigne $a^{\sqrt{2}}$.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES LOGARITHMES.

Définition.

70. On appelle *logarithme* d'un nombre l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever un nombre positif constant a pour reproduire le nombre proposé.

Nous avons vu que, lorsque x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction a^x passe par toutes les valeurs positives et ne passe qu'une fois par chacune d'elles ; il en résulte que tous les nombres positifs ont des logarithmes, et que chacun d'eux n'a qu'un logarithme. Si le nombre constant a est supérieur à l'unité, les nombres plus grands que l'unité ont des logarithmes positifs, les nombres plus petits que l'unité des logarithmes négatifs. Si a était inférieur à l'unité, les nombres plus grands que l'unité auraient au contraire des logarithmes négatifs, les nombres plus petits que l'unité des logarithmes positifs. Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes réels.

Nous désignerons le logarithme d'un nombre par la notation *log*.

Les logarithmes jouissent de propriétés très-remarquables que nous allons démontrer.

71. Théorème I. *Le logarithme du produit de plusieurs facteurs égale la somme des logarithmes de ces facteurs.*

Soient deux nombres y et y', dont nous appellerons x et x' les logarithmes; d'après la définition même des logarithmes, on a

$$a^x = y,$$
$$a^{x'} = y'.$$

Multiplions ces deux égalités membre à membre, il vient

$$a^{x+x'} = yy'.$$

L'exposant $x + x'$ est le logarithme du produit yy'; on a donc

$$\log(yy') = \log y + \log y'.$$

La même démonstration s'applique à un nombre quelconque de facteurs. Soient trois nombres y, y', y'', ayant pour logarithmes x, x', x''; on a de même

$$a^x = y,$$
$$a^{x'} = y',$$
$$a^{x''} = y'',$$

et, en multipliant

$$a^{x+x'+x''} = yy'y'';$$

donc

$$\log(yy'y'') = \log y + \log y' + \log y''.$$

72. Théorème II. *Le logarithme d'un quotient égale le logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.*

En divisant membre à membre les deux égalités

$$a^x = y,$$
$$a^{x'} = y',$$

on a

$$a^{x-x'} = \frac{y}{y'}.$$

L'exposant $x - x'$ est le logarithme du quotient $\frac{y}{y'}$. Donc

$$\log \frac{y}{y'} = \log y - \log y'.$$

73. Théorème III. *Le logarithme de la puissance d'un nombre égale le logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de la puissance.*

Si l'on élève à la m^e puissance (m étant un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, positif ou négatif), les deux membres de l'égalité

$$a^x = y,$$

il vient

$$a^{mx} = y^m.$$

Donc

$$\log (y^m) = m \log y.$$

74. Théorème IV. *Le logarithme de la racine d'un nombre égale le logarithme de ce nombre, divisé par l'indice de la racine.*

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème précédent; car $\sqrt[n]{y}$ s'écrit $y^{\frac{1}{n}}$, et l'on a

$$\log \sqrt[n]{y} = \frac{\log y}{n}.$$

L'emploi des logarithmes simplifie beaucoup les calculs numériques; car la multiplication est remplacée par une addition, la division par une soustraction, l'élévation à une puissance par une multiplication, l'extraction d'une racine par une division.

QUE DES NOMBRES SONT EN PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE, LES LOGARITHMES SONT EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE.

5. Si l'on prend les logarithmes des termes d'une progression géométrique

$$a : ar : ar^2 : ar^3 : \ldots\ldots,$$

dont la raison est r, on forme évidemment une progression arithmétique

$$\log a . \log a + \log r . \log a + 2 \log r . \log a + 3 \log r \ldots\ldots$$

qui a pour raison $\log r$.

En arithmétique, on a coutume de définir les logarithmes par deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro,

$$1 : a : a^2 : a^3 : \ldots\ldots$$
$$0 . b . 2b . 3b \ldots\ldots$$

et l'on appelle logarithme d'un terme quelconque de la progression géométrique le terme correspondant de la progression arithmétique; afin d'avoir les logarithmes de tous les nombres avec une grande approximation, on insère un grand nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression géométrique, et le même nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression arithmétique. Il est aisé de voir que cette définition des logarithmes par les progressions revient à la définition que nous venons de donner par les exponentielles.

Considérons les deux progressions

$$1 : a : a^2 : a^3 : \ldots\ldots$$
$$0 . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots$$

Si l'on insère $n-1$ moyens entre deux termes consécutifs des deux progressions, la raison de la progression géométrique devient $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$, celle de la progression arithmétique $\frac{1}{n}$, en sorte que les deux progressions ainsi développées s'écrivent

$$1 : a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{2}{n}} : a^{\frac{3}{n}} : \ldots\ldots a^{\frac{m}{n}} : \ldots\ldots$$

$$0 . \frac{1}{n} . \frac{2}{n} . \frac{3}{n} \ldots\ldots . \frac{m}{n} \ldots\ldots$$

Sous cette forme, on voit qu'un nombre quelconque $a^{\frac{m}{n}}$ de la progression géométrique a pour logarithme l'exposant $\frac{m}{n}$ de la puissance à laquelle il faut élever le nombre constant a pour avoir le nombre proposé. La base a d'un système de logarithmes est le nombre qui a pour logarithme l'unité.

COMMENT ON PASSE D'UN SYSTÈME DE LOGARITHMES A UN AUTRE SYSTÈME. LOGARITHMES NÉPÉRIENS. LOGARITHMES VULGAIRES. CE QU'ON APPELLE MODULE D'UN SYSTÈME DE LOGARITHMES.

76. La base d'un système de logarithmes est un nombre positif constant, que l'on peut choisir à volonté. Supposons que l'on ait calculé les logarithmes des nombres dans le système dont la base est a, et que l'on veuille les calculer dans un autre système ayant pour base a'. Appelons x le logarithme d'un nombre quelconque y dans le premier système, x' le logarithme du même nombre dans le second système, on aura

$$a^x = y, \qquad a'^{x'} = y;$$

où

$$a^x = a'^{x'}.$$

renons les logarithmes des deux membres de cette égalité ins le premier système, en remarquant que le logarithme e a est l'unité, il vient

$$x = x' \log a',$$

où

$$x' = \frac{1}{\log a'} x.$$

Ainsi les logarithmes des mêmes nombres dans les deux rstèmes sont proportionnels, et l'on a la règle suivante : *ur passer d'un système de logarithmes à un autre, il ffit de multiplier les logarithmes du premier système par inverse du logarithme de la nouvelle base pris dans le preier système.*

77. Les logarithmes ont été inventés au commencement u XVII[e] siècle par l'Écossais *Néper*, qui prit pour base le ombre incommensurable $e = 2{,}7182818\ldots..$; les logathmes de ce système ont été appelés logarithmes *hyperoliques*, ou, du nom de l'inventeur, logarithmes *népériens*. e sont ceux-là qui se présentent naturellement dans l'anase mathématique; on les désigne ordinairement par la ttre L.

Mais les logarithmes népériens ne sont pas commodes our les calculs numériques, parce qu'ils ne sont pas en harionie avec notre numération décimale. C'est pourquoi *Briggs*, ontemporain de Néper, proposa de remplacer la base e par a base *dix* de notre système de numération. Ce sont les loarithmes de Briggs dont on fait habituellement usage dans

les calculs numériques; on les a nommés pour cette raison *logarithmes vulgaires*; nous les désignerons par le signe log.

On appelle *module* d'un système de logarithmes le nombre constant par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour avoir les logarithmes du système considéré. Soit a la base d'un système de logarithmes; d'après ce qui a été dit précédemment, son module M sera

$$M = \frac{1}{La},$$

c'est-à-dire l'inverse du logarithme népérien de la base. Le module des logarithmes vulgaires est $M = 0,434294482\ldots$

Lorsqu'on passe d'un système dont la base est a à un système dont la base est a', le multiplicateur constant $\frac{1}{\log a'}$ s'appelle *module relatif* du premier système au second.

78. Il est bon de faire voir pourquoi Néper a choisi le nombre incommensurable e pour base de son système de logarithmes. Considérons les deux progressions

$$\begin{array}{l} 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \ldots\ldots \\ 0 \,.\; \beta \quad 2\beta \;.\; 3\beta \quad \ldots\ldots \end{array}$$

dans lesquelles α et β sont des quantités très-petites, afin que les termes des deux progressions croissent par degrés très-petits, et que l'on ait ainsi les logarithmes de tous les nombres avec une grande approximation. Néper appelait module des logarithmes définis par ces deux progressions le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, ou plutôt la limite de ce rapport, quand α et β tendent simultanément vers zéro, et il distinguait chaque système de logarithmes par son module. L'idée lui vi

alors d'adopter le système dont le module est l'unité, celui qu'il regardait comme le plus simple. Si l'on fait $\beta = \alpha$, les deux progressions deviennent

$$1 : 1 + \alpha : (1 + \alpha)^2 : (1 + \alpha)^3 : \ldots\ldots$$
$$1 \;.\; \alpha \;.\; 2\alpha \;.\; 3\alpha \ldots\ldots$$

Telles sont les deux progressions par lesquelles Néper définissait son système de logarithmes. Calculons la base de ce système, c'est-à-dire le nombre qui a pour logarithme l'unité; soit $m\alpha$ le terme de la progression arithmétique qui est égal à l'unité, ou à peu près, le terme correspondant de la progression géométrique est $(1 + \alpha)^m$; puisque $m\alpha = 1$, on a $\alpha = \frac{1}{m}$ et $(1 + \alpha)^m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$; lorsque α tend vers zéro, m augmente indéfiniment, et le nombre $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ tend vers la limite e, qui est la base des logarithmes népériens.

USAGE DES LOGARITHMES VULGAIRES. — CARACTÉRISTIQUES. — CARACTÉRISTIQUES NÉGATIVES.

79. Dans un système quelconque les puissances de la base a^1, a^2, a^3..... ont évidemment pour logarithmes les nombres entiers 1, 2, 3..... Dans le système vulgaire, ce sont les puissances de 10, savoir 10, 100, 1000,..... qui ont pour logarithmes les nombres entiers successifs. Les logarithmes ont été calculés en décimales; la partie entière d'un logarithme s'appelle *caractéristique*.

80. Les nombres plus petits que l'unité ont leurs logarithmes négatifs; les logarithmes négatifs étant incommodes dans la pratique, on leur substitue des logarithmes qui ont

leur partie décimale positive et leur caractéristique seulement négative. Soit le nombre 0,03564 plus petit que l'unité ; son logarithme est négatif et a pour valeur

$$-1,4480623.$$

Écrivons ce logarithme de la manière suivante

$$-2+1-0,4480623=-2+0,5519377,$$

ou plus simplement

$$\bar{2},5519377.$$

Sous cette forme le logarithme a sa partie décimale positive ; le signe —, placé au-dessus de la partie entière, indique que la caractéristique seule est négative. ***La caractéristique négative du logarithme d'un nombre décimal plus petit que l'unité renferme un nombre d'unités marqué par le rang du premier chiffre significatif, à partir de la virgule.*** En effet, soit m le rang du premier chiffre significatif à partir de la virgule dans le nombre proposé y; le produit $y \times 10^m$ étant compris entre 1 et 10, son logarithme a zéro pour caractéristique, avec une partie décimale positive; pour revenir au nombre y il faut diviser par 10^m, c'est-à-dire retrancher m du logarithme ; le logarithme de y aura donc une caractéristique négative $\bar{m}$, suivie d'une partie décimale positive.

UN NOMBRE ÉTANT DONNÉ, TROUVER SON LOGARITHME PAR LE MOYEN DES TABLES DE CALLET. — UN LOGARITHME ÉTANT DONNÉ, TROUVER LE NOMBRE AUQUEL IL APPARTIENT. — USAGE DES PARTIES PROPORTIONNELLES.

(*Voyez* la première partie, nos 211 à 225).

USAGE DE LA RÈGLE A CALCUL.

Je renvoie le lecteur à la note placée à la fin du volume.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS EXPONENTIELLES AU MOYEN DES LOGARITHMES.

81. On appelle équation *exponentielle* une équation de la rme

$$a^x = b,$$

ns laquelle a et b sont deux quantités positives données, xposant x l'inconnue qui doit vérifier l'égalité. Il est cile de résoudre une semblable équation au moyen des garithmes. Si l'on prend les logarithmes des deux mem-es de l'équation, on a

$$x \log a = \log b;$$

où

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

n obtient ainsi la valeur de l'inconnue.

Exemples.

1°

$$7^x = 1254$$

$$x = \frac{\log 1254}{\log 7} = \frac{3,0982975}{0,8450980} = 3,666197.$$

2°

$$3^x = 0,462$$

$$x = \frac{\log 0,462}{\log 3} = -0,702878.$$

n peut encore résoudre des équations exponentielles

plus compliquées que la précédente. Soit l'équation

$$a^{b^x} = c,$$

dans laquelle le premier membre signifie que le nombre a est élevé à une puissance marquée par b^x, les trois lettres a, b, c désignant d'ailleurs des nombres donnés positifs. En prenant les logarithmes des deux membres, on a

$$b^x \times \log a = \log c,$$

d'où

$$b^x = \frac{\log c}{\log a}.$$

On est ramené ainsi à l'exponentielle ordinaire. Pour que la question soit possible, il faut que a et c soient tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à l'unité, afin que le second membre ait une valeur positive. Si l'on prend une seconde fois les logarithmes, on a

$$x \log b = \log \log c - \log \log a;$$

d'où

$$x = \frac{\log \log c - \log \log a}{\log b}.$$

INTÉRÊTS COMPOSÉS. ANNUITÉS.

Voyez la première partie, nos 227 à 238.

CHAPITRE V.

DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

ÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION ENTIÈRE $f(x)$ SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES DE h QUAND ON REMPLACE x PAR $x+h$. — DÉRIVÉE D'UNE FONCTION ENTIÈRE.

82. Considérons un polynôme entier par rapport à x,

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m,$$

ns lequel les coefficients A_0, A_1, A_2, ... sont des con-ntes, x une variable. Pour abréger nous représenterons polynôme par le symbole $f(x)$ que l'on énonce *fonction* x, et qui nous servira plus tard à désigner une fonction elconque de x.

Si l'on remplace la variable x par $x+h$, il vient

$$x+h) = A_0(x+h)^m + A_1(x+h)^{m-1} + A_2(x+h)^{m-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + A_{m-1}(x+h) + A_m,$$

, en développant chaque terme suivant la loi du binôme,

$$
\begin{array}{llll}
f(x+h)=A_0x^m & +mA_0x^{m-1} \left| \frac{h}{1} \right. & +m(m-1)A_0x^{m-2} \left| \frac{h^2}{1.2} \right. & +\ldots+mA_0x \left| h^{m-1} \right. \\
+A_1x^{m-1} & +(m-1)A_1x^{m-2} & +(m-1)(m-2)A_0x^{m-3} & \ldots\ldots +A_1 \\
+A_2x^{m-2} & +(m-2)A_2x^{m-3} & +(m-2)(m-3)A_2x^{m-4} & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
+A_{m-1}x & +A_{m-1} & & \\
+A_m & & &
\end{array}
$$

Dans la première colonne verticale nous retrouvons le polynôme proposé $f(x)$; dans la seconde colonne qui contient h en facteur se trouve un polynône du degré $m-1$ que nous désignerons par $f'(x)$; de même nous représenterons par $f''(x)$, $f'''(x)$, ... les polynômes contenus dans les colonnes suivantes, et le développement s'écrira

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+f^{(m)}(x)\frac{h^m}{1.2\ldots\ldots m}.$$

83. Le polynôme

$$f'(x)=mA_0x^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-1},$$

coefficient de h dans le développement de $f(x+h)$, se nomme la *dérivée* du polynôme proposé. On la forme d'après cette règle très-simple : *Pour avoir la dérivée d'un polynôme entier, multipliez chaque terme par l'exposant de* x *dans ce terme, et diminuez ensuite cet exposant d'une unité.*

Le polynôme $f''(x)$, coefficient de $\frac{h^2}{1.2}$ dans le développement, se déduit du polynôme $f'(x)$ suivant la même loi

'appelle pour cette raison dérivée de la dérivée, ou *déri- seconde* du polynôme proposé.

ℓe polynôme $f'''(x)$ se déduit de même du polynôme c) suivant la loi ordinaire de dérivation ; c'est la déri- de la dérivée seconde, ou la *dérivée troisième* du poly- ne proposé, et ainsi de suite.

ℓe polynôme proposé étant du degré m, sa dérivée pre- re est du degré $m-1$, sa dérivée seconde du degré -2, sa dérivée troisième de degré $m-3$, et ainsi de te, chaque dérivation diminuant d'une unité le degré. dérivée de l'ordre m est du degré zéro ; c'est une con- nte. Les dérivées suivantes sont nulles. Ainsi un poly- ne du degré m a m dérivées.

Exemple.

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 6.$$

En appliquant la règle énoncée plus haut, on obtient les ivées successives :

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 7,$$
$$f''(x) = 6x + 10,$$
$$f'''(x) = 6.$$

Il est à remarquer que le terme constant du polynôme oposé n'entre pas dans la dérivée ; que les deux derniers mes n'entrent pas dans la seconde dérivée, etc. Le pre- er terme entre seul dans la dernière dérivée.

DÉRIVÉE D'UNE FONCTION QUELCONQUE EST LA LIMITE VERS LAQUELLE TEND LE RAPPORT DE L'ACCROISSEMENT DE LA FONCTION A L'ACCROISSEMENT DE LA VARIABLE, LORSQUE CELUI-CI TEND VERS ZÉRO.

84. Nous avons vu que, lorsque dans une fonction

entière $f(x)$ on donne à la variable x l'accroisse
fonction devient

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots+f^{(m)}(x)$$

Elle éprouve une variation ou un accroissement

$$k=f(x+h)-f(x)=f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots+f^{(m)}(x$$

On appelle accroissement, en mathématiques, la
d'une quantité, que cette variation soit positive
tive. Si l'accroissement h de la variable est
l'accroissement k de la fonction est aussi très-pet
somme d'un nombre déterminé de quantités tr
si le premier tend vers zéro, le second tend aussi
Ainsi à un accroissement infiniment petit de l
correspond un accroissement infiniment petit de la
on en conclut qu'une fonction entière par rapport
d'une manière continue, quand x varie d'une ma
tinue.

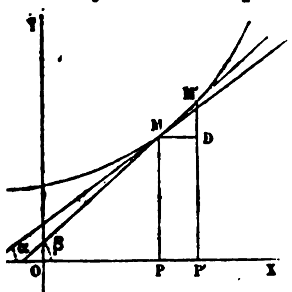
Prenons maintenant le rapport de l'accroissem
fonction à l'accroissement de la variable, nous au

$$\frac{k}{h}=f'(x)+f''(x)\frac{h}{1.2}\ldots\ldots+f^{(m)}(x)\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots\ldots m}.$$

Si l'on fait tendre h vers zéro, k tend aussi vers z
on voit que leur rapport $\frac{k}{h}$ tend vers une quant
minée $f'(x)$. Ainsi la dérivée d'une fonction enti
limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissem
fonction à l'accroissement de la variable, lorsqu
tend vers zéro.

s propriété de la dérivée d'une fonction entière a été omme définition de la dérivée d'une fonction con- [uelconque. Ainsi nous dirons que *la dérivée d'une n continue est la limite vers laquelle tend le rapport croissement de la fonction à l'accroissement de la va- quand celui-ci tend vers zéro.*

peut faire comprendre, à l'aide d'une figure, com- e rapport des accroissements tend en général vers nite finie et déterminée. Soit $y = f(x)$ la fonction ée. Traçons dans un plan deux droites fixes OX et OY,



l'une horizontale, l'autre verticale; à partir du point O portons sur la première une longueur OP égale à une valeur quelconque de la variable x; au point P élevons une perpendiculaire sur laquelle nous prendrons ongueur PM égale à la valeur correspondante de la on y, et opérons de même pour chaque valeur de x. nction étant continue, le lieu des points M ainsi is formera une courbe qui représentera la marche fonction. Afin d'étendre ce mode de représentation à les valeurs, on convient de porter les valeurs po- s de x à droite du point O, les valeurs négatives à e; et de même on porte la valeur de y sur la perpen- ire, au-dessus si elle est positive, au-dessous si elle gative.

a posé, donnons à x un accroissement $PP' = h$, la on éprouvera un accroissement k représenté par la ence M'D entre les deux perpendiculaires ou *ordonnées* es MP et M'P'. Traçons la sécante MM'; dans le

triangle rectangle MM'D, le rapport $\frac{k}{h}$ est égal à la tangente de l'angle M'MD ou de l'angle β que fait cette sécante avec l'axe horizontal OX. Supposons maintenant que l'accroissement h tende vers zéro, le point M' se rapprochera indéfiniment du point M, et la sécante, tournant autour du point M, tendra vers une position limite MT qui est la tangente à la courbe au point M. Or, si petit que soit h, le rapport $\frac{k}{h}$ reste toujours égal à tang β; mais l'angle β tend vers la limite α, angle de la tangente MT avec l'horizontale; donc le rapport $\frac{k}{h}$ tend vers la limite tang α.

RÈGLES POUR TROUVER LA DÉRIVÉE D'UNE SOMME, D'UN PRODUIT, D'UNE PUISSANCE, D'UN QUOTIENT, DE FONCTIONS DONT LES DÉRIVÉES SONT CONNUES.

Dérivée d'une somme.

85. Soient u, v, w diverses fonctions continues de la variable x, y leur somme algébrique

$$y = u + v - w.$$

Désignons par le symbole Δx l'accroissement que l'on donne à la variable x, par Δu, Δv, Δw, Δy, les variations ou accroissements qui en résultent pour les fonctions u, v, w, y (la lettre Δ indique en général une variation ou une différence). Nous convenons aussi de représenter les dérivées de ces fonctions par les notations u', v'; w', y', accentuant simplement les lettres qui désignent les fonctions.

n a évidemment

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

i l'on divise tous les termes par Δx, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

posons maintenant que l'accroissement Δx de la va-
le tende vers zéro, les accroissements correspondants
Δv, Δw, Δy des fonctions tendront aussi vers zéro; le
port $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tendra vers une limite qui, par définition, est
érivée de la fonction u, dérivée que nous représentons
u'; les rapports $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta w}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, tendront de même vers
limites qui sont les dérivées des fonctions v, w, y, et
aura

$$y' = u' + v' - w'.$$

insi la dérivée *d'une somme algébrique est la somme des*
vées des diverses fonctions qui la composent.

'après la règle énoncée pour la dérivation d'un poly-
e entier, on voit que cette dérivée est la somme des
ivées des différents termes du polynôme.

Dérivée d'un produit.

6. Considérons d'abord un produit de deux fonctions

$$y = uv.$$

'on donne à la variable x l'accroissement Δx, les fonc-
s u, v, y éprouvent des accroissements correspondants

Δu, Δv, Δy, et l'on a

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

ou, en effectuant la multiplication et supprimant dans les deux membres les quantités égales y et uv,

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u.\Delta v.$$

Divisons tous les termes par Δx, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}.\Delta v.$$

Si l'accroissement Δx de la variable x tend vers zéro, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendent vers des limites qui sont les dérivées u', v', y' des fonctions u, v, y; le troisième terme du second membre devient nul, parce que le premier facteur $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tend vers une valeur finie u', tandis que le second tend vers zéro. On a donc

$$y' = uv' + vu'.$$

La dérivée d'un produit de deux facteurs égale le premier facteur multiplié par la dérivée du second, plus le second multiplié par la dérivée du premier.

Considérons maintenant un produit de trois fonctions

$$y = uvw.$$

Si l'on regarde le produit uv des deux premières comme ne formant qu'un seul facteur, et si l'on applique la règle précédente, on a

$$y' = (uv)w' + w(uv)';$$

en développant la dérivée $(uv)'$ du produit uv, il vient

$$y' = uvw' + w(uv' + vu'),$$

ou

$$y' = uvw' + uwv' + vwu'.$$

Ainsi, *la dérivée d'un produit de plusieurs facteurs est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres.*

Exemples.

1° $$y = (2x - 5)(4x^2 + 7x - 3).$$

$$y' = (2x-5)(8x+7) + (4x^2 + 7x - 3)2 = 24x^2 - 12x - 41.$$

2° $$y = x^3(x^2 + 1)(3x - 1).$$

$$y' = x^3(x^2 + 1)3 + x^3(3x - 1)2x + (x^2 + 1)(3x - 1)3x^2$$
$$= 18x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 3x^2.$$

Dérivée d'un quotient.

87. Soit le quotient de deux fonctions

$$y = \frac{u}{v}.$$

La fonction u est le produit des deux fonctions v et y ; si l'on prend la dérivée du produit $u = vy$, d'après la règle précédente, il vient

$$u' = vy' + yv';$$

d'où l'on déduit

$$y' = \frac{u' - yv'}{v},$$

et, en remplaçant dans le numérateur y par $\frac{u}{v}$,

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Ainsi, *la dérivée d'un quotient égale le dénominateur multiplié par la dérivée du numérateur, moins le numérateur multiplié par la dérivée du dénominateur, cette différence étant divisée par le carré du dénominateur.*

Exemples.

1°
$$y = \frac{x-1}{x+1},$$
$$y' = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

2°
$$y = \frac{5x^2 - 3x + 4}{x^2 - 1}.$$
$$y' = \frac{(x^2-1)(10x-3)-(5x^2-3x+4)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2 - 18x + 3}{(x^2-1)^2}.$$

3°
$$y = \frac{a^2 - x^2}{a^4 + a^2x^2 + x^4},$$
$$y' = \frac{-2x(a^4 + a^2x^2 + x^4) - (a^2 - x^2)(2a^2x + 4x^3)}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2}$$
$$= \frac{2x(x^4 - 2a^2x^2 - 2a^4)}{(x^4 + a^2x^2 + a^4)^2}.$$

Dérivée d'une puissance.

88. Une puissance entière

$$y = u^m$$

d'une fonction u de la variable x est le produit de m facteurs égaux entre eux

$$y = uuu \ldots\ldots$$

l'on prend la dérivée de ce produit d'après la règle ordi-
ire, il vient

$$y' = u^{m-1}u' + u^{m-1}u' + \ldots\ldots$$

u plus simplement

$$y' = mu^{m-1}u'.$$

*n obtient la dérivée de la puissance d'une fonction en mul-
pliant par l'exposant, diminuant cet exposant d'une unité
multipliant le résultat par la dérivée de la fonction.*

Ce théorème est vrai pour un exposant quelconque. Con-
dérons une puissance fractionnaire

$$y = u^{\frac{m}{n}};$$

élevant à la n^e puissance, on a

$$y^n = u^m.$$

l'on prend les dérivées des deux membres, d'après la
gle précédente, il vient

$$ny^{n-1}y' = mu^{m-1}u',$$

où

$$y' = \frac{m}{n}\frac{u^{m-1}}{y^{n-1}}u',$$

en remplaçant y par sa valeur $u^{\frac{m}{n}}$,

$$y' = \frac{m}{n}u^{\frac{m}{n}-1}u'.$$

Considérons maintenant une puissance négative quel-
nque

$$y = u^{-m} = \frac{1}{u^m}.$$

En prenant la dérivée du quotient $\frac{1}{u^m}$, on a

$$y' = \frac{-mu^{m-1}u'}{u^{2m}} = -mu^{-m-1}u'.$$

C'est encore la même règle que pour les exposants po

Corollaire. *La dérivée d'une racine carrée égale la vée de la fonction placée sous le signe radical divisé deux fois le radical.* Car, en appliquant la règle précé à la fonction

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$y' = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}u' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Exemples.

1° $y = \sqrt{x}$; $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

2° $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

3° $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $y' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

4° $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, $y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

5° $y = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 5}$, $y' = \frac{6x^2 - 8x}{2\sqrt{2x^3 - 4x^2 +}}$

6° $y = x(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}$.

$$y' = (a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2} + 2x^2\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^4+a^2x}{\sqrt{a^2-}}$$

7' $y=(a+bx^m)^n,$

$$y'=n(a+bx^m)^{n-1}mbx^{m-1}=mnbx^{m-1}(a+bx)^{n-1}.$$

' $y=a+\frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{c}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{d}{x^2}=a+bx^{-\frac{2}{3}}-cx^{-\frac{4}{3}}+dx^{-2},$

$$=-\frac{2}{3}bx^{-\frac{5}{3}}+\frac{4}{3}cx^{-\frac{7}{3}}-2dx^{-3}=-\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\frac{2d}{x^3}.$$

$$y=\sqrt[4]{\left(a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right)^3}=\left(a-bx^{-\frac{1}{2}}+(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}},$$

$$=\frac{3}{4}\left(a-bx^{-\frac{1}{2}}+(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}\times\left(\frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}x(c^2-x^2)^{-\frac{1}{3}}\right).$$

DÉRIVÉE D'UNE FONCTION DE FONCTION.

89. Soit y une fonction $f(u)$ de la quantité u qui est elle-me une fonction de la variable x; par l'intermédiaire la variable u, y pourra être considérée comme une ction de x; c'est ce que l'on nomme une *fonction de ction.*

Si l'on donne à la variable x l'accroissement Δx, il en ulte pour u un accroissement Δu, et pour y un accroisnent Δy. On a évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Lorsque l'accroissement Δx de la variable tend vers zéro, croissement Δu, et par suite l'accroissement Δy, tendent ssi vers zéro; la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est la dérivée y' y considérée comme fonction de x; la limite du rapport est la dérivée $f'(u)$ de la fonction $f(u)$, c'est-à-dire de y

considérée comme fonction de la variable u; enfin la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ est la dérivé u' de la fonction u de x. On a donc

$$y' = f'(u) \times u'.$$

Ainsi *la dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des fonctions qui la composent.*

Ce principe peut être généralisé. Soit y une fonction $f(v)$ de la quantité v, qui est une fonction $\varphi(u)$ de la quantité u, qui est elle-même une fonction de x; par l'intermédiaire des quantités v et u, y est finalement une fonction de x dont nous cherchons la dérivée. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

et, en passant à la limite,

$$y' = f'(v) \times \varphi'(u) \times u'.$$

La règle établie plus haut, pour trouver la dérivée d'une fonction u^m, est un cas particulier du théorème que nous venons de démontrer sur les fonctions de fonctions.

DÉRIVÉES DES FONCTIONS CIRCULAIRES DIRECTES ET INVERSES.

Dérivée du sinus.

90. Soit la fonction

$$y = \sin x.$$

Si l'on donne à la variable x l'accroissement h, il en résulte pour la fonction l'accroissement

$$k = \sin(x + h) - \sin x.$$

En prenant le rapport des deux accroissements et transf

nt la différence des sinus en produit, il vient

$$\frac{k}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h},$$

$$\frac{k}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Quand l'accroissement h de la variable tend vers zéro, rapport $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ du sinus à l'arc $\frac{h}{2}$ tend vers l'unité, tandis e le second facteur se réduit à $\cos x$; le rapport $\frac{k}{h}$ tend nc vers une limite égale à $\cos x$, et l'on a

$$y' = \cos x.$$

isi *la dérivée du sinus est le cosinus.*

Dérivée du cosinus.

И. Soit la fonction

$$y = \cos x.$$

a de la même manière

$$\frac{k}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

et, en passant à la limite,

$$y' = -\sin x.$$

Ainsi *la dérivée du cosinus est le sinus pris*
traire.

Au moyen de ce qui précède, on obtient
dérivées successives du sinus ou du cosinus.

$$\begin{array}{ll} y = \sin x, & y = \cos x, \\ y' = \cos x, & y' = -\sin \\ y'' = -\sin x, & y'' = -\cos \\ y''' = -\cos x, & y''' = \sin x, \\ y^{(\text{IV})} = \sin x, & y^{(\text{IV})} = \cos x, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On voit que les dérivées se reproduisent pé
de quatre en quatre.

Dérivées de la tangente et de la séca

92. On obtient la dérivée de la fonction

$$y = \tan x,$$

en prenant la dérivée du quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$, c

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{}$$

De même la cotan

a pour dériv

IELLE LE DE LA

UE.

nentielle.

nent h, la fonction

fférence $a^h - 1$

ux mem-

se termine dans le premier ou dans le quatrième quadrant, on prendra le signe $+$; s'il se termine dans le second ou dans le troisième, on prendra le signe $-$.

94. La dérivée de la fonction inverse

$$y = \text{arc}\cos x$$

s'obtient de la même manière. On a, en effet,

$$\cos y = x,$$

et, en prenant les dérivées des deux membres,

$$-\sin y \times y' = 1;$$

d'où l'on déduit

$$y' = -\frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

On mettra devant le radical le signe de $\sin y$.

95. Considérons enfin la fonction inverse

$$y = \text{arc tang}\, x.$$

on a

$$\text{tang}\, y = x,$$

et, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 1;$$

d'où

$$y' = \cos^2 y.$$

Mais on sait que

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\text{tang}^2 y} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2};$$

...S DE LA FONCTION EXPONENTIELLE ET DE LA FONCTION LOGARITHMIQUE.

Dérivée de la fonction exponentielle.

la fonction exponentielle

$$y = a^x.$$

ne à la variable x l'accroissement h, la fonction accroissement

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$

rt des deux accroissements est

$$\frac{k}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

, lorsque h est très-petit, la différence $a^h - 1$ ...ite; posons donc

$$a^h - 1 = \alpha,$$

$$a^h = 1 + \alpha,$$

...ant les logarithmes népériens des deux mem-

$$hLa = L(1+\alpha),$$
$$h = \frac{L(1+\alpha)}{La}.$$

Remplaçons h par sa valeur, l'expression du rapp
vient

$$\frac{k}{h} = a^x \frac{\alpha . La}{L(1+\alpha)} = \frac{a^x La}{\frac{1}{\alpha} L(1+\alpha)} = \frac{a^x La}{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Lorsque h tend vers zéro, α tend aussi vers zéro
quantité $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ devient égale à e (n° 55) ; mais l
donc

$$y' = \lim \frac{k}{h} = a^x La.$$

Ainsi, *pour avoir la dérivée d'une fonction expon*
il suffit de multiplier cette fonction par le logarith
rien de la base.

97. Considérons en particulier la fonction expon
$y = e^x$; puisque $Le = 1$, on a $y' = e^x$. Ainsi, *la dériv*
fonction e^x *est cette fonction elle-même.* La fonction
de la propriété caractéristique de se reproduire elle
par la dérivation.

Dérivée de la fonction logarithmique.

98. La fonction logarithmique

$$y = \log x$$

est l'inverse de la fonction exponentielle. Si a dés
base du système de logarithmes, on a

$$a^y = x.$$

Prenons les dérivées des deux membres d'après la
nous venons de démontrer, en regardant a^y comm
fonction de fonction ; il vient

$$a^y La \times y' = 1,$$

d'où

$$y' = \frac{1}{a^y La}.$$

En remplaçant a^y par x, et remarquant que la quantité $\frac{1}{La}$ est le module M du système de logarithmes (n° 77), on a enfin

$$y' = \frac{1}{xLa} = \frac{M}{x}.$$

Telle est la dérivée de la fonction logarithmique.

Considérons comme cas particulier la fonction logarithmique népérienne

$$y = Lx;$$

le module étant l'unité, on a

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Résumé.

99. Nous avons trouvé les dérivées des fonctions simples que l'on considère ordinairement en mathématiques ; il est nécessaire de les apprendre par cœur ; le tableau suivant permet de les embrasser d'un coup d'œil :

$y = x^m$,	$y' = mx^{m-1}$, m étant quelconque,	
$y = \sin x$,	$y' = \cos x$,	
$y = \cos x$,	$y' = -\sin x$,	
$y = \operatorname{tang} x$,	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$,	
$y = \operatorname{arc} \sin x$,	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	en supposant l'arc x compris entre o et $\frac{\pi}{2}$,
$y = \operatorname{arc} \cos x$,	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

$$y = \text{arc tang}\, x, \qquad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y = a^x, \qquad y' = a^x \mathrm{L}a,$$

$$y = e^x, \qquad y' = e^x,$$

$$y = \log x, \qquad y' = \frac{1}{x\mathrm{L}a},$$

$$y = \mathrm{L}x, \qquad y' = \frac{1}{x}.$$

100. Les fonctions complexes pouvant être considérées comme des fonctions de fonctions, on calculera leurs dérivées d'après la loi connue. En voici quelques exemples :

1° $y = \sin x^2$. Si l'on pose $u = x^2$, on a $y = \sin u$ et l'on voit que y est une fonction de fonction. L'application du théorème donne

$$y' = \cos u \times u' = 2x \cos x^2.$$

2° $y = e^{\sin x}$. Si l'on pose $u = \sin x$, on a encore une fonction de fonction $y = e^u$, qui admet pour dérivée

$$y' = e^u \times u' = e^{\sin x} \times \cos x.$$

3° $y = e^{\sin x^2}$. Si l'on pose $u = x^2$, $v = \sin u$, on a une fonction de fonction $y = e^v$ plus compliquée que les précédentes ; le même théorème donne

$$y' = e^v . \cos u . 2x = 2x e^{\sin x^2} \cos x^2.$$

4° $y = \mathrm{L}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. En posant $u = x + \sqrt{1+x^2}$, on a la fonction de fonction $y = \mathrm{L}u$, qui admet pour dérivée

$$y' = \frac{1}{u} \times u' = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$= x^x$. En remarquant que, d'après la définition même arithmes népériens, on a identiquement $x = e^{Lx}$, on écrire cette fonction sous la forme $y = e^{xLx}$; si l'on $= xLx$, on a la fonction de fonction $y = e^u$, qui admet érivée

$$y' = e^u u' = e^u(1 + Lx) = x^x(1 + Lx).$$

'habitude, on arrive à décomposer les fonctions compar la pensée, sans employer les lettres auxiliaires

ICTION EST CROISSANTE OU DÉCROISSANTE SUIVANT QUE SA DÉRIVÉE EST POSITIVE OU NÉGATIVE.

Soit $f(x)$ une fonction continue, $f'(x)$ sa dérivée. vons appelé dérivée d'une fonction la limite du rapl'accroissement k de la fonction à l'accroissement h ariable, quand ces accroissements tendent vers zéro. que h est très-petit, le rapport $\frac{k}{h}$ diffère très-peu de e; on a donc

$$\frac{k}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

$$k = h[f'(x) + \varepsilon],$$

une quantité très-petite qui s'annule avec h. La $f'(x)$, ayant une valeur finie, est plus grande que ntité infiniment petite ε en valeur absolue, et par uent donne son signe à la parenthèse. En suppopositive, c'est-à-dire la variable x croissante, on e la variation k de la fonction aura le signe de la $f'(x)$; si la dérivée est positive, k sera positive et

la fonction ira en croissant; si la dérivée est négative, la sera négative et la fonction ira en décroissant.

102. Lorsqu'une fonction, après avoir augmenté, décroît ensuite, elle passe par un *maximum*, c'est-à-dire par une valeur plus grande que les valeurs voisines. Au contraire, lorsque la fonction, après avoir diminué, croît ensuite, elle passe par un *minimum*, c'est-à-dire par une valeur plus petite que les valeurs voisines.

Dans le premier cas, la fonction commençant par croître, la dérivée est d'abord positive; la fonction décroissant ensuite, la dérivée devient négative. Ainsi, quand la fonction passe par un maximum, la dérivée change de signe, de positive devenant négative.

Dans le second cas, la fonction commençant par décroître, la dérivée est d'abord négative; la fonction croissant ensuite, la dérivée devient positive. Ainsi, quand la fonction passe par un minimum, la dérivée change de signe, de négative devenant positive.

Les réciproques sont vraies : lorsque la dérivée change de signe, la fonction passe par un maximum ou par un minimum. Si la dérivée de positive devient négative, la fonction, croissant d'abord pour décroître ensuite, passe par un maximum; si la dérivée de négative devient positive, la fonction, décroissant d'abord pour croître ensuite, passe par un minimum.

Ordinairement la dérivée d'une fonction continue est aussi finie et continue; elle change de signe en passant par la valeur intermédiaire zéro. On obtiendra donc les valeurs de x qui rendent la fonction maximum ou minimum en cherchant les valeurs de x qui annulent la dérivée, et qui en outre lui font éprouver un changement de signe.

Exemples.

103. QUESTION I. Quel est le plus grand de tous les cylindres circulaires droits ayant même surface totale?

Appelons x le rayon de la base, y la hauteur, et représentons la surface totale donnée par $2\pi a^2$; nous avons la relation

$$2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi a^2,$$

ou plus simplement

$$x^2 + xy = a^2.$$

Le volume V du cylindre a pour expression

$$V = \pi x^2 y,$$

et si l'on remplace la hauteur y par sa valeur $y = \frac{a^2 - x^2}{x}$ tirée de la relation précédente,

$$V = \pi x(a^2 - x^2) = \pi(a^2 x - x^3);$$

c'est une fonction de la variable indépendante x.

La dérivée de cette fonction

$$V' = \pi(a^2 - 3x^2)$$

s'annule pour

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Les valeurs de x et de y devant rester positives, le rayon x de la base peut varier de zéro à a. A l'inspection de la dérivée, on voit qu'elle est positive pour les valeurs de x inférieures à $\frac{a}{\sqrt{3}}$, négative pour les valeurs de x supérieures à $\frac{a}{\sqrt{3}}$; si donc on fait croître x de o à $\frac{a}{\sqrt{3}}$, la dérivée

étant positive, le volume augmente; x croissant ensuite de $\frac{a}{\sqrt{3}}$ à a, la dérivée devient négative et le volume diminue. Le volume passe donc par une valeur maximum qu'il acquiert pour $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$; la valeur correspondante de y est $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Ainsi, parmi tous les cylindres de même surface totale, le plus grand est celui qui a sa hauteur égale au diamètre de sa base.

104. Question II. Quel est le plus grand de tous les cônes circulaires droits ayant même surface totale?

Si l'on appelle x le rayon de la base, y la hauteur, πa^2 la surface donnée, on a la relation

$$x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} = a^2;$$

le volume a pour expression

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 y,$$

ou, en remplaçant y par sa valeur

$$y = \frac{a\sqrt{a^2 - 2x^2}}{x}$$

tirée de la relation précédente,

$$V = \frac{\pi a}{3} x \sqrt{a^2 - 2x^2}.$$

Le volume est une fonction de x qui a pour dérivée

$$V' = \frac{\pi a(a^2 - 4x^2)}{3\sqrt{a^2 - 2x^2)}}.$$

e dérivée s'annule pour $x = \frac{a}{2}$. Les valeurs de x et de evant rester réelles et positives, x ne peut varier que à $\frac{a}{\sqrt{2}}$. La variable x croissant de o à $\frac{a}{2}$, la dérivée est itive et le volume augmente; x croissant de $\frac{a}{2}$ à $\frac{a}{\sqrt{2}}$, la ivée devient négative, et le volume diminue. Le volume se donc par un maximum quand $x = \frac{a}{2}$; la valeur cor- ondante de y est $y = a\sqrt{2}$; on en déduit pour le côté ône la valeur $\frac{3a}{2}$. Ainsi, parmi tous les cônes de même ace, le plus grand est celui dans lequel le côté est au nètre de la base dans le rapport de 3 à 2.

105. Question III. Étant donnée une feuille de carton rectangulaire ABCD, si, après avoir mené des parallèles aux quatre côtés à la même distance, on enlève les petits carrés dans les angles, et qu'on relève les portions rectangulaires telles que LF, on forme une boîte à fond rectangulaire EFGH. A lle distance faut-il mener les parallèles pour que la boîte la plus grande ?

ppelons $2a$ et $2b$ les côtés AB et AD de la feuille de on, x la distance variable AK à laquelle on mène les allèles; le fond de la boîte est un rectangle ayant pour s $EF = 2(a - x)$ et $EH = 2(b - x)$, et pour surface $-x)(b-x)$; la hauteur de la boîte est x; le volume a donc r expression

$$V = 4x(a - x)(b - x).$$

La dérivée de cette fonction est

$$V' = 4[3x^2 - 2(a+b)x + ab];$$

elle s'annule pour les deux valeurs

$$x = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{3},$$

racines de l'équation du second degré

$$3x^2 - 2(a + b)x + ab = 0.$$

Supposons $a > b$; d'après la nature de la question, s
être plus petit que b; or, il est aisé de voir que, des
racines de l'équation du second degré, l'une est plus
que b, l'autre plus grande; car, si dans le premier me
de cette équation on remplace x par zéro, on trou
résultat positif $+ ab$; par b un résultat négatif $- b(a$
donc l'équation admet une racine positive comprise e
et b; l'autre racine est aussi positive, mais elle est
grande que b; la première racine

$$x' = \frac{a - b \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{3}$$

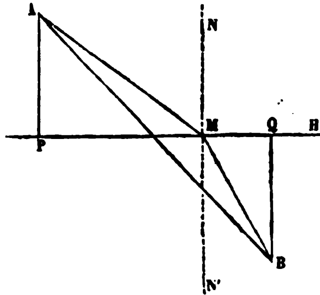
convient seule à la question.

Si l'on fait croître x de o à x', le premier memb
l'équation, et par suite la dérivée, sont positives, et la
tion croît; x croissant de x' à b, la dérivée devient nég
et la fonction décroît; la fonction acquiert donc une
maximum pour $x = x'$.

106. Question IV. Soit GH la ligne de séparation de
milieux; on suppose que la lumière se meuve dans ces
milieux avec des vitesses différentes v et v'. Quel chemi

vre le rayon lumineux pour aller du point A au point B ns le temps le plus court?

Nous pouvons déterminer la position des points A et B r leurs distances AP et BQ à la droite GH, et par la distance PQ; nous désignerons ces trois longueurs connues par a, b, c. Si la vitesse était la même dans les deux milieux, il est clair que la lumière suivrait le chemin le plus court, c'est-à-dire la droite AB; mais la vitesse v dans le milieu supérieur



nt plus grande que la vitesse v' dans le milieu inférieur, y a avantage à ce que la lumière parcoure une plus nd longueur dans le premier milieu et une moindre ns le second; elle suivra donc une ligne brisée telle que IB. Appelons x la distance cherchée PM; la lumière parart dans les deux milieux les longueurs

$$AM = \sqrt{a^2 + x^2}, \qquad MB = \sqrt{b^2 + (c - x)^2};$$

e emploie à les parcourir les temps

$$\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v}, \qquad \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v'};$$

e met donc, pour aller de A à B, en suivant le chemin IB, le temps

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v'}.$$

temps est une fonction de x, considérée comme variable lépendante; elle a pour dérivée

$$t' = \frac{x}{v\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v'\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

Au point M menons une perpendiculaire NN' à GH; l'angle AMN est l'angle d'incidence i, l'angle BMN' l'angle de réfraction i'. Comme a

$$\sin i = \frac{\text{PM}}{\text{AM}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$\sin i' = \frac{\text{QM}}{\text{BM}} = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}};$$

il en résulte cette expression de la dérivée

$$t' = \frac{\sin i}{v} - \frac{\sin i'}{v'}.$$

La dérivée sera nulle quand on aura

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin i'}{v'}.$$

Supposons que le point M se déplace de P en Q, c'est-à-dire que la variable x croisse de o à c; la dérivée est négative pour $x = 0$, positive pour $x = c$; donc la fonction t, décroissant d'abord pour croître ensuite, passe un minimum. C'est ce minimum qui est défini par la relation

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{v}{v'};$$

on retrouve ainsi la loi ordinaire de la réfraction de la lumière.

107. Question V. Étudier la variation de la surface du secteur sphérique de volume constant.

Appelons x le rayon du secteur, y la hauteur de la calotte qui lui sert de base, et supposons que le volume soit

à celui d'une sphère de rayon donné a; nous aurons
lation

$$\frac{2}{3}\pi x^2 y = \frac{4}{3}\pi a^3,$$

lus simplement

$$x^2 y = 2a^3, \qquad y = \frac{2a^3}{x^2}.$$

urface du secteur a pour expression

$$S = \pi x\sqrt{y(2x - y)} + 2\pi xy,$$

si l'on remplace y par sa valeur,

$$S = 2\pi a\left[\frac{2a^2}{x} + \sqrt{a\left(x - \frac{a^3}{x^2}\right)}\right].$$

e fonction a pour dérivée

$$S' = \frac{\pi a^2}{x^2}\left(\frac{x^3 + 2a^3}{\sqrt{a(x^3 - a^3)}} - 4a\right).$$

lérivée change de signe lorsque le sens de l'inégalité

$$\frac{x^3 + 2a^3}{\sqrt{a(x^3 - a^3)}} - 4a \gtrless 0$$

nge; mais cette inégalité se ramène à la suivante

$$x^6 - 12a^3x^3 + 20a^6 \gtrless 0.$$

égalant à zéro, on arrive à l'équation trinôme (Ire partie, 82).

$$x^6 - 12a^3x^3 + 20a^6 = 0,$$

admet les deux racines réelles $a\sqrt[3]{2}$ et $a\sqrt[3]{10}$.
our que la surface S soit réelle, il faut que la valeur

de x soit plus grande que a; ainsi, le rayon x peut varier de a à $+\infty$. Lorsque $x = a$, on a $y = 2a$, $S = 4\pi a^2$; le secteur se réduit à une sphère de rayon a. Si l'on donne à x une valeur un peu plus grande que a, le premier terme de S' ayant une valeur positive très-grande, la dérivée est positive, et par conséquent la surface S augmente quand x croît à partir de a.

Supposons que x croisse de a à la plus petite racine $a\sqrt[3]{2}$; la dérivée, conservant le même signe, reste positive et la surface augmente; quand x dépasse $a\sqrt[3]{2}$, la dérivée, s'évanouissant et changeant de signe, devient négative, et la surface diminue. La surface passe donc par une valeur *maximum* $3\pi a^2\sqrt[3]{4}$ pour $x = a\sqrt[3]{2}$; la valeur correspondante de y étant égale à celle de x, le secteur prend alors la forme d'une demi-sphère. Dans l'intervalle, la valeur de y, qui va toujours en diminuant, était supérieure à celle de x et le secteur plus grand qu'un hémisphère.

Quand x croît de la plus petite racine à la plus grande, la dérivée reste négative et la surface diminue; quand x dépasse $a\sqrt[3]{10}$, la dérivée, s'évanouissant une seconde fois et changeant de signe, devient positive et la surface augmente. La surface passe donc par un *minimum* $\pi a^2\sqrt[3]{100}$ pour $x = a\sqrt[3]{10}$; la hauteur y de la calotte est alors le cinquième du rayon.

Quand x croît à l'infini à partir de $a\sqrt[3]{10}$, la dérivée reste constamment positive et la surface augmente indéfiniment.

En résumant ce qui précède, on voit que le secteur de volume constant a d'abord la forme d'une sphère entière, et alors sa surface est la plus petite possible. La sphère

uvre de plus en plus, et la surface du secteur augmente qu'à ce qu'il se réduise à une moitié de sphère. Le secur s'allonge ensuite. et la surface diminue jusqu'à ce que hauteur de la calotte ne soit que le cinquième du rayon. secteur continuant à s'allonger indéfiniment, la surface gmente à partir de ce minimum et augmente indéfiniınt.

Dérivées d'une fonction de plusieurs variables.

108. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des fonctions ıne seule variable; nous allons dire quelques mots des ıctions de plusieurs variables. Soit $f(x, y)$ une fonction deux variables indépendantes x et y (on nomme vabbles indépendantes des quantités qui varient d'une maıre tout à fait arbitraire et indépendamment l'une de utre). Si, regardant y comme une constante, nous preas la dérivée de la fonction par rapport à la variable x, us aurons ce qu'on appelle la *dérivée partielle* de la foncn par rapport à x. De même, si regardant x comme une nstante, nous prenons la dérivée par rapport à la vable y, nous aurons la dérivée partielle par rapport à y. lles sont les deux dérivées partielles du premier ordre la fonction proposée; nous les désignerons par les notions f'_x et f'_y, l'indice indiquant la lettre par rapport à quelle on dérive.

Si l'on dérive deux fois successivement, soit deux fois r rapport à x, soit une fois rapport à x et une sende fois par rapport à y, soit deux fois par rapport à y, obtient trois dérivées partielles du second ordre que us désignerons par les notations f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}. Et ainsi de

Par exemple, soit la fonction

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 4y + 2.$$

En décrivant par rapport à x ou par rapport à y, on a les deux dérivées partielles du premier ordre

$$f'_x = 6x - 5y - 3,$$
$$f'_y = -5x + 2y + 4.$$

En décrivant une seconde fois, soit par rapport à x, soit par rapport à y, on forme les trois dérivées partielles du second ordre

$$f''_{x^2} = 6, \qquad f''_{xy} = -5, \qquad f''_{y^2} = 2.$$

Les dérivées suivantes sont nulles.

Extension du théorème des fonctions de fonctions.

109. Soit une fonction $f(u, v)$ de deux quantités u et v qui sont elles-mêmes des fonctions de la variable x; il est clair que y est en définitive une fonction de la variable x. On demande sa dérivée. Si l'on donne à la variable x l'accroissement Δx, il en résulte pour u et v les accroissements Δu et Δv, et pour y l'accroissement Δy, et l'on a

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v),$$

ou

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) + f(u, v + \Delta v) - f(u, v).$$

En divisant par Δx, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$+ \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

ipposons maintenant que Δx tende vers zéro, les rap-rts $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent vers les dérivées u' et v' des fonc-ns u et v. Dans le rapport

$$\frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v},$$

voit que, u restant constante, la variable v éprouve ccroissement Δv; la limite de ce rapport est donc la dé-ée partielle $f'_v(u, v)$ de la fonction $f(u, v)$ par rapport ı. On voit de même que, dans le rapport

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u},$$

quantité $v + \Delta v$ restant constante, la variable u éprouve ccroissement Δu; la limite de ce rapport est la dérivée rtielle de la fonction $f(u, v + \Delta v)$ par rapport à u; mais fonction $f(u, v + \Delta v)$ devenant égale à $f(u, v)$, puisque s'évanouit, cette dérivée sera $f'_u(u, v)$. On a donc

$$y' = f'_u \times u' + f'_v \times v'.$$

ısi la dérivée d'une fonction de deux fonctions u et v ne même variable x égale la dérivée partielle de la fonc-n proposée par rapport à u multipliée par la dérivée u, plus la dérivée partielle par rapport à v multipliée r la dérivée de v.

Exemples.

l° Prenons comme exemple la fonction $y = x^x$, dont ıs avons déjà trouvé la dérivée (n° 100). Si l'on pose $= x$, $v = x$, on a $y = u^v$; d'où, en appliquant le théo-ıe précédent,

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v.\mathrm{L}u.v' = x^x + x^x\mathrm{L}x = x^x(1 + \mathrm{L}x).$$

2° $y = (\sin x)^{4x}$. Posant $u = \sin x$, $v = 4x$, on aura de même $y = u^v$; d'où

$$y' = vu^{v-1}.u' + u^v.\mathrm{L}u.v' = 4x\cos x(\sin x)^{4x-1} + 4(\sin x)^{4x}\mathrm{L}(\sin x).$$

Dérivées des fonctions implicites.

110. On dit qu'une fonction est *implicite* lorsqu'elle est liée à la variable par une équation non résolue. Ainsi l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

dans laquelle le premier membre est une fonction quelconque des deux variables x et y, définit une fonction implicite y de x. Si l'on pouvait résoudre l'équation, on en déduirait $y = \varphi(x)$ et la fonction deviendrait *explicite*.

On peut obtenir aisément la dérivée d'une fonction implicite. En effet, prenons la dérivée de la fonction $f(x, y)$, dans laquelle nous regardons x comme la variable indépendante, et y comme une fonction de x ; cette dérivée, d'après le théorème précédent, est égale à

$$f'_x + f'_y \cdot y'.$$

Comme la fonction $f(x, y)$ est constamment nulle, sa dérivée est aussi constamment nulle, et l'on a l'équation

$$f'_x + f'_y \cdot y' = 0.$$

d'où l'on déduit

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Telle est l'expression de la dérivée de la fonction implicite y.

Exemples.

1° Considérons la fonction implicite y définie par l'équa-
n

$$x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0.$$

a, d'après la formule que nous venons d'établir,

$$y' = -\frac{2x - 4y + 2}{-4x + 2y} = \frac{2y - x - 1}{y - 2x}.$$

L'équation proposée, étant du second degré par rapport
y, peut être résolue, ce qui donne

$$y = 2x \pm \sqrt{3x^2 - 2x}.$$

fonction devenant ainsi explicite, on trouve directement
dérivée,

$$y' = 2 \pm \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x}},$$

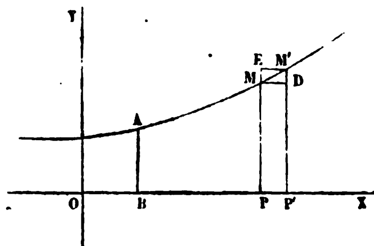
remplaçant y par sa valeur dans la première expression
y', on obtient la seconde.

2° $\quad 3x^5 - 4xy + y^3 = 0, \qquad y' = -\frac{15x^4 - 4y}{-4x + 3y^2}.$

DES FONCTIONS PRIMITIVES.

111. On appelle *fonction primitive* d'une fonction donnée
e fonction dont la fonction proposée est la dérivée. Nous
ons démontrer d'abord l'existence de la fonction primi-
e, qu'on puisse ou non l'exprimer au moyen des signes
l'algèbre.

Soit $y = f(x)$ la fonction proposée; représentons cette fonction par une courbe, comme nous l'avons expliqué au n° 84, en portant sur la ligne horizontale OX, à partir du point O, des longueurs égales aux diverses valeurs de la variable x, et élevant des perpendiculaires ou ordonnées égales aux valeurs correspondantes de y. Considérons l'aire ABPM comptée à partir d'une ordonnée fixe AB jusqu'à une ordonnée mobile MP; cette aire est une fonction de x; car, si l'on fait croître x, l'ordonnée MP s'éloignant, l'aire augmente; l'aire, variant avec x, est donc une fonction de x; nous désignerons cette fonction par $F(x)$. Je vais démontrer que la fonction $F(x)$, ainsi définie, est la fonction primitive de la fonction proposée $f(x)$.



Concevons, en effet, que l'on donne à x un accroissement $PP' = h$; l'accroissement k de la fonction $F(x)$ sera l'aire du trapèze curviligne MPP'M'; par les points M et M' menons les horizontales MD et M'E; on voit que l'aire du trapèze curviligne est comprise entre celles des rectangles MPP'D et EPP'M'; ces rectangles ont pour mesure $MP \times h$, $M'P' \times h$; on a donc

$$MP \times h < k < M'P' \times h,$$

et, en divisant par h,

$$MP < \frac{k}{h} < M'P'.$$

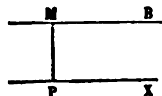
Quand h tend vers zéro, l'ordonnée M'P' devient égale à MP;

iite de $\frac{k}{h}$ ou la dérivée $F'(x)$ est égale à l'ordon-
'est-à-dire à $f(x)$. Ainsi la fonction proposée $f(x)$
vée de la fonction $F(x)$; et réciproquement, la
(x) est la fonction primitive de $f(x)$.
te de là qu'une fonction continue quelconque a
on primitive, que l'on peut représenter par une
. Si à la fonction primitive $F(x)$ on ajoute une
arbitraire C, on aura encore une fonction primi-
$+$ C; car la constante ne donne rien dans la

TIONS QUI ONT DES DÉRIVÉES ÉGALES NE PEUVENT DIFFÉRER QUE PAR UNE CONSTANTE.

vais faire voir d'abord que lorsqu'une fonction
vée constamment nulle, cette fonction est con-

ons la fonction figurée par une ligne. Si l'on désigne par α l'angle que fait la tangente à la ligne en un point quelconque avec l'horizontale OX, nous savons (n° 84) que la dérivée de la fonction représente *tang* α. Puisque la dérivée est constamment



ıngle α est lui-même constamment nul. Ainsi la
chacun de ses points a sa tangente horizontale;
ıt être qu'une ligne droite horizontale AB. L'or-
IP de chacun des points de cette ligne droite est
; on en conclut que la fonction proposée a une
onstante.

Mais il est bon de démontrer algébriquement cette proposition.

Soit $f(x)$ une fonction ; en donnant à x l'accroissement h, nous avons (n° 101) la relation

$$f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon],$$

ε s'évanouissant avec h. Si la dérivée est constamment nulle, cette relation se réduit à

$$f(x+h)-f(x)=h\varepsilon.$$

Je considère deux valeurs quelconques x_0 et X de la variable x, X étant supposée plus grande que x_0 ; je partage l'intervalle $X-x_0$ en n parties égales, et j'appelle h chacune de ces parties. En appliquant la relation précédente à ces divers éléments, on a

$$\begin{aligned}
f(x_0+h)-f(x_0)&=h\varepsilon_0,\\
f(x_0+2h)-f(x_0+h)&=h\varepsilon_1,\\
f(x_0+3h)-f(x_0+2h)&=h\varepsilon_2,\\
&\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\\
f(X)-f[x_0+(n-1)h]&=h\varepsilon_{n-1},
\end{aligned}$$

chacune des quantités ε_0, ε_1, ... ε_{n-1} s'évanouissant avec h.

Si l'on ajoute toutes ces égalités, les quantités intermédiaires disparaissent et l'on trouve

$$f(X)-f(x_0)=h(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots\ldots+\varepsilon_{n-1}).$$

Appelons ε la plus grande des quantités ε_0, ε_1, ... en valeur absolue ; leur somme sera évidemment moindre que $n\varepsilon$, et le second membre plus petit que $nh\varepsilon$ ou que $(X-x_0)\varepsilon$, puisque nh égale $X-x_0$; on aura donc

$$f(X)-f(x_0)<(X-x_0)\varepsilon.$$

Imaginons maintenant que l'on partage l'intervalle con-nt $X - x_0$ en un nombre de parties de plus en plus grand; grandeur h des parties diminuera indéfiniment; toutes les antités ε_0, ε_1,....., et par conséquent la plus grande d'en- elles ε, tendront simultanément vers zéro, et le pro-üt $(X - x_0)\varepsilon$ s'évanouira. Il en résulte que la différence $X) - f(x_0)$ est nulle, c'est-à-dire que les valeurs $f(X)$ et $x_0)$ de la fonction pour deux valeurs quelconques de la riable sont égales; ainsi la fonction conserve toujours même valeur : c'est une constante.

113. Soient maintenant deux fonctions $F(x)$ et $\varphi(x)$, yant même dérivée $f(x)$, je dis que ces deux fonctions ne euvent différer que par une constante. En effet, on a, par ypothèse,

$$\varphi'(x) = f(x),$$
$$F'(x) = f(x);$$

i l'on retranche ces deux égalités l'une de l'autre, il vient

$$\varphi'(x) - F'(x) = 0.$$

lais $\varphi'(x) - F'(x)$ est la dérivée de la fonction $\varphi(x) - F(x)$; uisque cette dérivée est constamment nulle, la fonction est onstante; donc

$$\varphi(x) - F(x) = C.$$

114. Nous avons dit (n° 111) que lorsqu'on a trouvé une nction primitive $F(x)$ de la fonction proposée, et que l'on ajoute une constante arbitraire, on obtient une nouvelle nction primitive $F(x) + C$. Il résulte de ce qui précède que on forme ainsi toutes les fonctions primitives de la fonction roposée, puisque toute autre fonction primitive ne diffère e la première que par une constante. Cette fonction pri-

mitive $F(x) + C$, renfermant une constante arbitraire, s'appelle, pour cette raison, fonction primitive ***générale*** de la fonction proposée.

On peut déterminer la constante de manière que la fonction primitive ait une valeur donnée A pour une valeur donnée a de x; on posera

$$F(a) + C = A,$$

d'où

$$C = A - F(a).$$

Si l'on veut, par exemple, que la fonction primitive s'annule pour $x = a$, on posera

$$F(a) + C = 0;$$

d'où

$$C = -F(a),$$

et la fonction primitive devient $F(x) - F(a)$.

La représentation géométrique de la fonction primitive montre bien que cette fonction renferme une constante arbitraire; car on peut compter l'aire à partir d'une ordonnée initiale AB quelconque (n° **111**), et quand on change la position de cette ordonnée initiale, on modifie évidemment l'aire d'une quantité constante. Déterminer la constante de manière que la fonction primitive s'annule pour $x = a$, c'est compter l'aire à partir de l'ordonnée initiale qui correspond à $x = a$.

REVENIR DE LA DÉRIVÉE A LA FONCTION PRIMITIVE, DANS LE CAS OÙ CETTE OPÉRATION PEUT SE FAIRE IMMÉDIATEMENT.

115. Considérons d'abord une fonction entière

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m;$$

ction primitive est

$$\frac{\ \ ^{m+1}}{-1}+\frac{A_1x^m}{m}+\frac{A_2x^{m-1}}{m-1}+\ldots\ldots+\frac{A_{m-1}x^2}{2}+A_mx+C;$$

n prenant la dérivée de ce polynôme, on retrouve le
)me proposé. Ainsi, *pour avoir la fonction primitive
fonction entière, on augmente tous les exposants d'une
et on divise chaque terme par l'exposant ainsi aug-*
Cette opération élève le degré d'une unité.
exemple, le polynôme

$$x^2-5x+7$$

: fonction primitive générale

$$\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+7x+C.$$

veut que la fonction primitive s'annule pour $x=0$,
ι $C=0$.
nême règle s'applique aux exposants quelconques.

Exemples.

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},$$
$$F(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.$$
$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}.$$
$$F(x)=-x^{-1}+C=\frac{1}{x}+C.$$
$$f(x)=-\frac{2}{3}ax^{-\frac{5}{3}}+\frac{4}{3}bx^{-\frac{7}{3}}-2dx^{-3}.$$
$$F(x)=ax^{-\frac{2}{3}}-bx^{-\frac{4}{3}}+dx^{-2}+C.$$

116. Voici encore d'autres cas où l'on peut trouver immédiatement la fonction primitive :

1°	$f(x) = \frac{1}{x}$,	$F(x) = Lx + C$,
2°	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,	$F(x) = \text{arc tang}\,x + C$,
3°	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	$F(x) = \text{arc sin}\,x + C$,
4°	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	$F(x) = -\,\text{arc cos}\,x + C$,
5°	$f(x) = e^x$,	$F(x) = e^x + C$,
6°	$f(x) = a^x$,	$F(x) = \frac{a^x}{La} + C$,
7°	$f(x) = \cos x$,	$F(x) = \sin x + C$,
8°	$f(x) = \sin x$,	$F(x) = -\cos x + C$,
9°	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$,	$F(x) = \text{tang}\,x + C$,
10°	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$,	$F(x) = -\cot x + C$,
11°	$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$,	$F(x) = \text{séc}\,x + C$,
12°	$f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$,	$F(x) = -\,\text{coséc}\,x + C.$

Souvent le théorème sur les fonctions de fonctions perme de connaître la fonction positive.

1° $f(x) = \frac{1}{x+a}$, $\qquad F(x) = L(x+a) + C$,

2° $f(x) = \frac{1}{(x+a)^m} = (x+a)^{-m}$, $\quad F(c) = \frac{-1}{(m-1)(x-a)^{m-1}}$

$$f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\,\frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2},\quad F(x)=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}+C,$$

$$f(x)=\frac{x}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\,\frac{2x}{a^2+x^2},\quad F(x)=\frac{1}{2}\,L(a^2+x^2)+C.$$

oit ici que, le numérateur $2x$ étant la dérivée du dé-
inateur a^2+x^2, la fonction $\frac{2x}{a^2+x^2}$ est la dérivée de
$+x^2$).

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},\qquad F(x)=\sqrt{a^2+x^2}+C,$$

$$f(x)=e^{ax},\qquad F(x)=\frac{e^{ax}}{a}+C,$$

$$f(x)=\cos ax,\qquad F(x)=\frac{\sin ax}{a}+C,$$

$$f(x)=\frac{Lx}{x},\qquad F(x)=\frac{1}{2}(Lx)^2+C,$$

$$f(x)=\frac{1}{xLx},\qquad F(x)=LLx+C,$$

$$f(x)=\frac{1}{x(Lx)^m},\qquad F(x)=\frac{-1}{(m-1)(Lx)^{m-1}}+C,$$

$$f(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}},\qquad F(x)=\operatorname{arc\,tang}(e^x)+C.$$

APPLICATION DE LA THÉORIE DES DÉRIVÉES AU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS $L(1 + x)$ ET *arc tang x* EN SÉRIES CONVERGENTES, ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES DE x, LORSQUE CETTE VALEUR RESTE COMPRISE ENTRE -1 ET $+1$.

Développement de $L(1 + x)$.

117. La fonction $L(1 + x)$ a pour dérivée $\frac{1}{1+x}$. En effectuant la division de 1 par $1 + x$, et ordonnant le quotient suivant les puissances croissantes de x, on trouve

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots \mp x^{n-1} \mp \frac{x^n}{1+x}.$$

La somme des n premiers termes

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots \mp x^{n-1}$$

du second membre est la dérivée du polynôme

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots \mp \frac{x^n}{n},$$

que nous désignerons par $f(x)$. Nous représenterons d'ailleurs par $\pm\varphi(x)$ la différence qui existe entre les deux fonctions $L(1 + x)$ et $f(x)$, c'est-à-dire que nous poserons

$$\pm\varphi(x) = L(1 + x) - f(x),$$

d'où

$$L(1 + x) = f(x) \pm \varphi(x).$$

En convenant de prendre le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que n est pair ou impair, et nous remarquerons que la fonc-

(x), comme les deux fonctions dont elle est la diffé-, s'annule avec la variable x.

prenant la dérivée des deux membres on a

$$\pm\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - f'(x) = \pm\frac{x^n}{1+x},$$

us simplement

$$\varphi'(x) = \frac{x^n}{1+x}.$$

pposons d'abord x positive; la valeur de la fonction $\frac{}{x}$ étant positive et inférieure à x^n, on aura

$$\varphi'(x) > 0,$$
$$\varphi'(x) - x^n < 0.$$

eux expressions admettent respectivement pour fonc-primitives

$$\varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

nction $\varphi(x)$, ayant sa dérivée positive, va en croissant x; comme elle s'évanouit pour $x = 0$, elle prend des rs positives croissantes quand x croît à partir de 0. nction $\varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{n+1}$, ayant sa dérivée négative, va ontraire en décroissant quand x croît; comme elle nouit aussi avec x, elle prend des valeurs négatives d x croît à partir de 0; on a donc

$$\varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{n+1} < 0,$$

$$\varphi(x) < \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

, pour toutes les valeurs positives de la variable x,

la fonction $\varphi(x)$ a une valeur positive inférieure à $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Si l'on désigne par θ une certaine fraction moindre que l'unité, on pourra représenter la valeur de $\varphi(x)$ par $\frac{\theta x^{n+1}}{n+1}$, et l'on aura

$$L(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\mp\frac{x^n}{n}\pm\frac{\theta x^{n+1}}{n+1}.$$

Cette égalité est vraie, quelle que soit la valeur positive attribuée à x. Supposons maintenant que la valeur de x soit inférieure ou au plus égale à l'unité; si l'on fait augmenter n indéfiniment, le terme complémentaire $\frac{\theta x^{n+1}}{n+1}$ tend vers zéro; on en conclut que la somme des n premiers termes de la série

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots..,$$

tend vers la limite $L(1+x)$, et l'on obtient ainsi le développement de $L(1+x)$ en série convergente

$$(1)\qquad L(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots..$$

pour toutes les valeurs positives de x inférieures ou égales à l'unité.

118. Donnons maintenant à la variable une valeur négative $-x$ comprise entre 0 et -1, et proposons-nous de développer la fonction $-L(1-x)$, dans laquelle x a une valeur positive inférieure à l'unité. Cette fonction a pour dérivée $\frac{1}{1-x}$, expression qui se développe de la manière

suivante

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

La somme des n premiers termes du second membre est la dérivée du polynôme

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n},$$

que nous désignerons par $f(x)$. Nous représenterons par $\varphi(x)$ la différence entre les deux fonctions $-\mathrm{L}(1-x)$ et $f(x)$, c'est-à-dire que nous poserons

$$\varphi(x) = -\mathrm{L}(1-x) - f(x),$$

d'où

$$-\mathrm{L}(1-x) = f(x) + \varphi(x),$$

En prenant les dérivées des deux membres, on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1-x} - f'(x) = \frac{x^n}{1-x},$$

et nous remarquerons que la fonction $\varphi(x)$, comme les deux fonctions dont elle est la différence, s'annule avec la variable x.

Désignons par α une quantité très-petite, mais déterminée, et supposons que x varie de 0 à $1-\alpha$; la valeur de la fonction $\frac{x^n}{1-x}$ sera positive et inférieure à $\frac{x^n}{\alpha}$ (car le dénominateur $1-x$ est plus grand que α), et l'on aura

$$\varphi'(x) > 0,$$

$$\varphi'(x) - \frac{x^n}{\alpha} < 0.$$

Ces deux expressions admettent respectivement pour fonctions primitives

$$\varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)\alpha}.$$

En raisonnant comme précédemment, on voit que la fonction $\varphi(x)$, ayant sa dérivée positive et s'évanouissant avec x, prend des valeurs positives croissantes quand x croît de o à $1-\alpha$, et que la fonction $\varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)\alpha}$, ayant sa dérivée négative et s'évanouissant avec x, prend des valeurs négatives. Ainsi la fonction $\varphi(x)$ a une valeur positive inférieure à $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\alpha}$; on peut la représenter par $\frac{\theta x^{n+1}}{(n+1)\alpha}$, en désignant par θ une fraction, et l'on a

$$-L(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n} + \frac{\theta x^{n+1}}{(n+1)\alpha},$$

pour toutes les valeurs de x inférieures à $1-\alpha$. Si l'on fait augmenter n indéfiniment, le terme complémentaire tend vers zéro; d'où l'on conclut que la somme des n premiers termes de la série

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots$$

tend vers la limite $-L(1-x)$. On obtient de cette manière le développement de la fonction $-L(1-x)$ en série convergente

$$-L(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots$$

pour toutes les valeurs de x inférieures à $1-\alpha$. Comme la quantité α, dont nous avons fait usage dans la démonstra-

m, peut être prise aussi petite que l'on veut, le développement a lieu pour toutes les valeurs de x inférieures à unité. On a ainsi

$$) \qquad L(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots$$

ur toutes les valeurs de x inférieures à l'unité.

Remarquons que l'égalité (2) se déduit de l'égalité (1), changeant x en $-x$. La série (1) représente donc la nction $L(1+x)$, x variant de -1 exclusivement à $+1$ clusivement.

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION *arc tang x*.

119. Afin de préciser le sens de la fonction *arc tang x*, us supposerons qu'elle s'évanouit avec x et qu'elle rie ensuite d'une manière continue avec cette variae. La méthode qui nous a donné le développement de $(1+x)$ nous conduira aussi au développement de la foncon *arc tang x*.

La fonction *arc tang x* a pour dérivée $\frac{1}{1+x^2}$. Par la diision, cette dérivée se développe de la manière suivante :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots \mp x^{2n-2} \pm \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

La somme des n premiers termes

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots \mp x^{2n-2}$$

du second membre est la dérivée du polynôme

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots \mp \frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

que nous désignerons par $f(x)$. Nous représenterons d'ailleurs par $\pm\,\varphi(x)$ la différence qui existe entre les deux fonctions *arc tang* x et $f(x)$, c'est-à-dire que nous poserons

$$\pm\,\varphi(x) = \text{arc tang}\, x - f(x),$$

en convenant de prendre le signe + ou le signe — suivant que n est pair ou impair, et nous remarquerons que la fonction $\varphi(x)$, comme les deux fonctions dont elle est la différence, s'annule avec la variable x.

En prenant les dérivées des deux membres, on a

$$\pm\,\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - f'(x) = \pm\,\frac{x^{2n}}{1+x^2},$$

ou plus simplement

$$\varphi'(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

La quantité $\frac{x^{2n}}{1+x^2}$ étant positive et inférieure à x^{2n}, on a les inégalités

$$\varphi'(x) > 0,$$
$$\varphi'(x) - x^{2n} < 0.$$

La fonction $\varphi(x)$, ayant sa dérivée positive, croît avec x; comme elle s'évanouit pour $x = 0$, elle prend des valeurs positives croissantes, quand x croît à partir de zéro. La fonction $\varphi(x) - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, ayant sa dérivée négative, décroît au contraire quand x croît; comme elle s'évanouit aussi avec x, elle prend des valeurs négatives quand x croît à partir de zéro. On a donc, pour toutes les valeurs positives de x,

$$\varphi(x) - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < 0,$$

$$\varphi(x) < \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

nsi la fonction $\varphi(x)$ a une valeur positive inférieure à $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, et l'on pourra écrire

$$\varphi(x) = \frac{\theta x^{2n+1}}{2n+1},$$

désignant par θ une quantité positive plus petite que nité. On en déduit

$$\text{arc tang } x = f(x) \pm \frac{\theta x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\text{arc tang } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots \mp \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \pm \frac{\theta x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Si l'on suppose maintenant que la variable x soit inférieure ou au plus égale à l'unité, la quantité

$$\frac{\theta x^{2n+1}}{2n+1}$$

nd vers zéro, quand n augmente indéfiniment, et par suite fonction $f(x)$ tend vers une limite égale à *arc tang* x; on donc, pour toutes les valeurs de x comprises entre o et 1,

$$\text{(3)} \qquad \text{arc tang } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots$$

Cette série convient aussi aux valeurs négatives de x comprises entre o et -1, puisque les deux membres changent de signe avec x, en conservant la même valeur absolue. Ainsi la série (3) est convergente et représente la fonction *arc tang* x, quand x varie de -1 et $+1$ inclusivement.

CALCUL DES LOGARITHMES AU MOYEN DE LA SÉRIE QUI DONNE LE LOGARITHME DE $n+1$, QUAND ON CONNAÎT CELUI DE n. — CALCUL DES LOGARITHMES NÉPÉRIENS. — VALEUR DU MODULE DES LOGARITHMES VULGAIRES. — CALCUL DES LOGARITHMES VULGAIRES.

120. Nous nous proposons de trouver une série donnant la différence entre les logarithmes de deux nombres entiers consécutifs n et $n+1$. Puisque

$$L(n+1)-Ln=L\frac{n+1}{n}=L\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

si dans la série (1) on remplace x par la fraction $\frac{1}{n}$, on a

$$L(n+1)-Ln=\frac{1}{n}-\frac{1}{2.n^2}+\frac{1}{3.n^3}-\ldots$$

Mais cette série ne converge pas assez rapidement, et il faudrait prendre un grand nombre de termes pour avoir les logarithmes avec une certaine approximation.

On arrive à une série beaucoup plus rapidement convergente de la manière suivante : Si l'on retranche l'une de l'autre les deux séries obtenues précédemment

$$L(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots$$
$$L(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\ldots,$$

les termes de degré pair se retranchent, ceux de degré impair s'ajoutent, et l'on a

$$L(1+x)-L(1-x)=L\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\ldots\right).$$

osons maintenant

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n},$$

'où

$$x=\frac{1}{2n+1},$$

t remplaçons x par sa valeur, nous obtiendrons la série

$$(4)\qquad L\frac{n+1}{n}=L(n+1)-Ln$$
$$=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5.(2n+1)^5}+\ldots\ldots\right],$$

qui converge d'autant plus rapidement que le nombre n est plus grand.

Calcul des logarithmes népériens.

121. C'est au moyen de la série (4) que l'on calcule les logarithmes népériens.

En faisant $n=1$ dans cette série, on a

$$L2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3.3^3}+\frac{2}{5.3^5}+\frac{2}{7.3^7}+\ldots\ldots$$

On commencera par réduire en décimales les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3^3}$, $\frac{2}{3^5}$, ..., en divisant successivement par 9; puis on les divisera par les nombres impairs 1, 3, 5, 7, ... Les dix premiers termes donnent, avec dix décimales exactes,

$$L2=0{,}69314\ 71806$$

Si dans la série (4) on fait $n=2$, on a

$$L3-L2=\frac{2}{5}+\frac{2}{3.5^3}+\frac{2}{5.5^5}+\ldots\ldots$$

On abrége le calcul en remarquant que diviser par 25

revient à diviser par 100 et à multiplier par 4. Les sept premiers termes donnent, avec dix décimales exactes,

$$L3 = 1{,}09861\ 22887.$$

On obtient L4 en doublant L2, d'où

$$L4 = 1{,}38629\ 43611.$$

On calculera ensuite L5 par la série

$$L5 - L4 = \frac{2}{9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \ldots\ldots$$

Les fractions $\frac{2}{9}, \frac{2}{9^3}, \frac{2}{9^5}, \ldots\ldots$, s'obtiennent en divisant par 3 les fractions déjà calculées $\frac{2}{3}, \frac{2}{3^5}, \frac{2}{3^9}, \ldots\ldots$ Les cinq premiers termes donnent avec dix décimales exactes

$$L5 = 1{,}60943\ 79124.$$

On obtiendra L6 en ajoutant L3 et L2. On calculera L7 par la série en faisant $n=6$, et ainsi de suite indéfiniment.

Calcul des logarithmes vulgaires.

122. Quand on veut calculer les logarithmes vulgaires, il faut d'abord chercher le module. Pour cela on calcule le logarithme népérien de 2, au moyen de la série

$$L2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} + \frac{2}{7.3^7} + \ldots\ldots$$

comme nous l'avons expliqué dans le numéro précédent, ce qui donne

$$L2 = 0{,}69314\ 71806.$$

En doublant ce logarithme, on obtient le logarithme népérien de 4,

$$L4 = 1,38629\ 43611.$$

On détermine ensuite le logarithme népérien de 5 au oyen de la série

$$L5 - L4 = \frac{2}{9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \ldots\ldots$$

ı remarquant que ces nouvelles fractions se déduisent de lles qui ont servi au calcul de L2, comme nous l'avons pliqué.

Une fois qu'on a trouvé L2 et L5, l'addition de ces deux garithmes donne

$$L10 = 2,30258\ 50930.$$

On sait que le module M des logarithmes vulgaires est gal à $\frac{1}{L10}$ (n° 77) ; divisant 1 par L10, on aura la vaur de ce module

$$M = 0,43429\ 44819.$$

En le doublant, on a

$$2M = 0,86868\ 89638.$$

On obtient les logarithmes vulgaires en multipliant par le odule les logarithmes népériens. La série (h) devient ainsi

$$\text{i)} \quad \log(n+1) - \log n = 2M\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\ldots\right].$$

est cette série que l'on emploiera pour calculer les logathmes vulgaires, en séparant les termes et l'écrivant sous forme

$$) \quad \log(n+1) - \log n = \frac{2M}{2n+1} + \frac{2M}{3(2n+1)^3} + \frac{2M}{5(2n+1)^5} + \ldots\ldots$$

On obtiendra le logarithme vulgaire de 2, en multipliant

par M le logarithme népérien de 2 qui a servi à trouver le module. On calculera log 3 par la série

$$\log 3 - \log 2 = \frac{2M}{5} + \frac{2M}{3.5^3} + \frac{2M}{5.5^5} + \ldots\ldots$$

On calculera d'abord les fractions $\frac{2M}{5}, \frac{2M}{5^3}, \frac{2M}{5^5}, \ldots\ldots$ en divisant successivement par 25, plus simplement en multipliant par 4 et divisant par 100; on divisera ces fractions respectivement par 1, 3, 5, ...; en ajoutant les résultats, on aura log 3. On aura log 4 en doublant log 2. On obtiendra log 5, et en multipliant par M le logarithme népérien de 5 qui a servi à trouver le module. On trouvera log 6 en ajoutant log 2 et log 3. On calculera log 7 par la série

$$\log 7 - \log 6 = \frac{2M}{13} + \frac{2M}{3.13^3} + \frac{2M}{5.13^5} + \ldots\ldots$$

On aura log 8 en ajoutant log 4 et log 2, log 9 en doublant log 3; on sait d'ailleurs que log 10 = 1. On calculera log 11 par la série, et ainsi de suite indéfiniment.

La série (6) convergeant de plus en plus à mesure que l'on s'élève dans l'échelle des nombres entiers, les calculs deviendront bientôt extrêmement rapides. On aura, par exemple, le logarithme de 101 avec huit décimales exactes au moyen de deux termes seulement

$$\log 101 - 2 = \frac{2M}{201} + \frac{2M}{3.201^3}.$$

On calculera d'abord le premier terme en divisant nombre connu 2M par 201; puis on déduira le second terme du premier en divisant celui-ci par 3.201^2 ou par 121203.

Le premier terme de la série suffira pour le logarithme de 1001,

$$\log 1001 - 3 = \frac{2M}{2001},$$

et à plus forte raison au delà.

CALCUL DU RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE D'APRÈS LA SÉRIE *arc tang x*.

123. Nous avons obtenu le développement de la fonction *arc tang* x en série convergente

$$(7) \qquad \text{arc tang}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots$$

pour toutes les valeurs de x inférieure ou égale à l'unité. Cette série permet de calculer la longueur d'un arc dont on connaît la tangente ; il en résulte plusieurs manières de déterminer le rapport de la circonférence au diamètre.

1° L'arc qui a pour tangente l'unité, est la moitié du quadrant ou $\frac{\pi}{4}$. En faisant $x = 1$ dans la série, on a donc

$$(8) \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots$$

Mais cette série ne converge pas assez rapidement et il faudrait un trop grand nombre de termes pour obtenir π avec quelque approximation. On a recours à d'autres procédés.

2° En appelant a l'arc qui a pour tangente $\frac{1}{2}$, on a la série

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \ldots\ldots$$

qui converge plus rapidement que la précédente, et qui donne une portion a du demi-quadrant $\frac{\pi}{4}$. Pour avoir la partie complémentaire, je pose

$$b=\frac{\pi}{4}-a,$$

et je prends les tangentes des deux membres

$$\operatorname{tang} b=\frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tang} a}{1+\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}\operatorname{tang} a}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Ainsi l'arc b a pour tangente $\frac{1}{3}$, et se développe de la manière suivante

$$b=\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}-\ldots\ldots$$

En ajoutant les deux arcs a et b, on a

$$(9)\qquad \frac{\pi}{4}=a+b=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}-\ldots\ldots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}-\ldots\ldots\right)\ldots$$

De cette manière l'arc $\frac{\pi}{4}$ est donné par la somme de deux séries.

3° Je pars maintenant de l'arc qui a pour tangente $\frac{1}{5}$, et j'appelle a cet arc,

$$a=\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\ldots\ldots$$

Je double cet arc; j'ai

$$\tang 2a = \frac{2 \tang a}{1 - \tang^2 a} = \frac{3}{4}.$$

$2a$ est encore plus petit que $\frac{\pi}{4}$; j'appelle b la diffé-

$$b = \frac{\pi}{4} - 2a,$$

$$\tang b = \frac{1 - \tang 2a}{1 + \tang 2a} = \frac{1}{7}.$$

b qui a pour tangente $\frac{1}{7}$ est donné par la série

$$b = \frac{1}{7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \dots\dots$$

donc

$$\frac{\pi}{4} = 2a + b = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \dots\dots\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \dots\dots\right)$$

On obtient des séries très-rapidement convergentes artant de l'arc a qui a pour tangente $\frac{1}{5}$,

$$a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \dots\dots$$

ouble cet arc, j'ai

$$\tang 2a = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}.$$

ouble encore une fois, j'ai

$$\operatorname{tang} 4a = \frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Cette dernière tangente étant un peu plus grande que l'unité, l'arc $4a$ est un peu plus grand que $\frac{\pi}{4}$; j'appelle b la différence

$$b = 4a - \frac{\pi}{4},$$

et je calcule la tangente de cet arc,

$$\operatorname{tang} b = \frac{\frac{120}{119}-1}{\frac{120}{119}+1} = \frac{1}{239}.$$

L'arc très-petit b, dont la tangente est $\frac{1}{239}$, sera donné par la série

$$b = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\ldots$$

et l'on aura

$$(11) \quad \frac{\pi}{4} = 4a - b = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots\ldots\right),$$

d'où

$$(12) \quad \pi = 16a - 4b = \frac{16}{5} - \frac{16}{3.5^3} + \frac{16}{5.5^5} - \ldots\ldots - \left(\frac{4}{239} - \frac{4}{3.239^3} + \ldots\ldots\right).$$

Ces deux séries convergent très-rapidement, surtout la seconde. Aussi cette dernière formule est-elle de beau-

à celles que nous avons données précédem-

ici le calcul de π avec 16 décimales exactes, au
a formule (12).

Calcul de 16a.

	$\frac{16}{5} = 3{,}2$
3	$\frac{16}{5.5^5} = 0{,}00102\,4$
512	$\frac{16}{9.5^9} = 0{,}00000\;09102\;22222\;22$
020 48	$\frac{16}{13.5^{13}} = 0{,}00000\;00010\;08246\;15$
000 8192	$\frac{16}{17.5^{17}} = 0{,}00000\;00000\;01233\;62$
000 03276 8	$\frac{16}{21.5^{21}} = 0{,}00000\;00000\;00001\;60$
000 00131 072	$3{,}20102\;49112\;31703\;59$
000 00005 24288	$\frac{16}{3.5^3} = 0{,}04266\;66666\;66666\;67$
000 00000 20971 52	$\frac{16}{7.5^7} = 0{,}00002\;92571\;42857\;14$
000 00000 00838 86	$\frac{16}{11.5^{11}} = 0{,}00000\;00297\;89090\;91$
000 00000 00033 55	$\frac{16}{15.5^{15}} = 0{,}00000\;00000\;34952\;53$
	$\frac{16}{19.5^{19}} = 0{,}00000\;00000\;00044\;15$
	$0{,}04269\;59536\;33611\;40$
	$16a = 3{,}15832\;89575\;98092\;19$

Calcul de 4b.

$$\frac{4}{239} = 0{,}01673\ 64016\ 73640\ 17 \qquad \frac{4}{239} = 0{,}01673\ 64016\ 73640\ 17$$

$$\frac{4}{239^3} = 0{,}00000\ 02929\ 99101\ 44 \qquad \frac{4}{5.239^5} = 0{,}00000\ 00000\ 01025\ 89$$

$$\frac{4}{239^5} = 0{,}00000\ 00000\ 05129\ 45 \qquad \overline{0{,}01673\ 64016\ 74666\ 06}$$

$$\frac{4}{3.239^3} = 0{,}00000\ 00976\ 66367\ 15$$

$$4b = 0{,}01673\ 63040\ 08298\ 91$$

Calcul de π.

$$16a = 3{,}15832\ 89575\ 98092\ 19$$
$$4b = 0{,}01673\ 63040\ 08298\ 91$$
$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 28$$

Il faut prendre onze termes dans la première série, trois dans la seconde. Les puissances impaires de $\frac{1}{5}$ se dédui-sent les unes des autres en divisant par 25, c'est-à-dire en multipliant par 4 et divisant par 100. Nous avons fait le calcul avec 17 décimales; mais on ne peut pas compter sur la dernière décimale que l'on supprimera; on aura donc π avec seize décimales exactes

$$\pi = 3,\ 14159\ 26535\ 897932.$$

Questions à résoudre.

Question I. Trouver les dérivées des fonctions suivantes :

1° $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$. *Rép.* : $y' = \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2° $y = \operatorname{tang} x - \cot x$, $y' = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

3° $y = x(\mathrm{L}x - 1)$, $y' = \mathrm{L}x$.

4° $y = e^x(x-1)$, $y' = xe^x$.

5° $y = x \sin x + \cos x$, $y' = x \cos x$.

6° $y = -x \cos x + \sin x$, $y' = x \sin x$.

7° $x = \frac{1}{2}\mathrm{L}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $y' = \frac{1}{x^2-1}$.

8° $y = \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2-1})$, $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

9° $y = \mathrm{L}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$, $y' = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

10° $y = \arccos\left(\frac{a-2x}{a}\right)$, $y' = \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$.

11° $y = \frac{1}{6}\mathrm{L}\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $y' = \frac{1}{x^3-1}$,

Question II. Dans un demi-cercle inscrire un trapèze de surface maximum.

Réponse. Le trapèze maximum est la moitié d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle.

Question III. Parmi tous les parallélipipèdes rectangles à base carrée de même surface totale, quel est celui qui a le plus grand volume ?

Réponse. Le cube.

Question IV. Sur les faces d'un cube on élève six pyramides régulières de même hauteur. Parmi tous les corps

de même surface ainsi formés, quel est celui qui a le plus grand volume ?

Question V. Parmi toutes les niches de même surface, quelle est celle qui a le plus grand volume ?

Réponse. Le volume est maximum quand l'élévation de la niche égale le diamètre de la base.

Question VI. Sur la droite qui joint deux lumières, trouver le point le plus éclairé par ces deux lumières.

Réponse. Il faut partager la droite qui joint les deux lumières proportionnellement aux racines cubiques des intensités.

Question VII. Un cylindre de rayon donné est terminé par deux cônes égaux. Parmi tous les corps de cette forme, qui ont même surface totale, quel est celui qui a le plus grand volume ?

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

COMMENT VARIE UNE FONCTION ENTIÈRE $f(x)$ QUAND x VARIE D'UNE MANIÈRE CONTINUE ENTRE $-\infty$ ET $+\infty$.

125. Lemme I. *Quand un polynôme entier en* x *ne contient pas de terme constant, on peut donner à* x *une valeur assez petite pour que le polynôme ait une valeur plus petite que toute quantité donnée.*

Soit

$$ax + bx^2 + cx^3 + \ldots\ldots + kx^n$$

un polynôme entier en x, ne renfermant pas de terme constant, et ordonné suivant les puissances croissantes de x. Je dis qu'on peut donner à x une valeur assez petite, abstraction faite du signe, pour que la valeur absolue du polynôme soit plus petite qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit. En effet, si l'on désigne par M le plus grand coefficient en valeur absolue, et par y la valeur absolue du polynôme, on a évidemment

$$y < \mathrm{M}(x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots),$$

puisqu'on remplace tous les coefficients par le plus grand d'entre eux et qu'on a pris tous les termes positivement; on peut aussi prolonger la série à l'infini, en supposant x inférieure à l'unité, afin de rendre la série convergente. Faisons la somme des termes, il vient

$$y < \frac{Mx}{1 - x}.$$

La question sera satisfaite si l'on rend le second membre plus petit que α; posons donc

$$\frac{Mx}{1 - x} < \alpha,$$

d'où

$$x < \frac{\alpha}{M + \alpha}.$$

Ainsi, pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\frac{\alpha}{M+\alpha}$ et $+\frac{\alpha}{M+\alpha}$, le polynôme aura une valeur comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

Par exemple, la valeur du polynôme

$$2x - 3x^2 + 7x^3 + 9x^4 - 4x^5$$

sera comprise entre $-0,1$ et $+0,1$, quand la variable x sera comprise entre $-\frac{1}{91}$ et $+\frac{1}{91}$, ou plus simplement entre $-0,01$ et $+0,01$.

126. Lemme II. *Quand un polynôme entier est ordonné par rapport aux puissances croissantes de* x, *on peut donner à la variable une valeur assez petite pour que le premier terme soit plus grand qne la somme de tous les autres, et par conséquent donne son signe au polynôme.*

$$y = ax^n + bx^{n+1} + cx^{n+2} + \ldots\ldots$$

lynôme proposé ; je le mets sous la forme

$$y = x^n(a + bx + cx^2 + \ldots\ldots).$$

venons de démontrer que l'on peut donner à x une ur assez petite numériquement pour que la valeur ab- du polynôme

$$bx + cx^2 + \ldots\ldots$$

inférieure à celle de a. Pour ces valeurs de x, le pre- terme du polynôme proposé sera plus grand que la me de tous les autres et donnera son signe au poly- e.

ır exemple, le premier terme du polynôme

$$2x - 3x^2 + 7x^3 + 9x^4 - 4x^5$$

plus grand que la somme de tous les autres pour les urs de x comprises entre $-\frac{2}{11}$ et $+\frac{2}{11}$.

27. Lemme III. *Quand un polynôme entier est ordonné rapport aux puissances décroissantes de* x, *on peut ner à* x *une valeur assez grande pour que le premier e soit plus grand que la somme de tous les autres, et, conséquent, donne son signe au polynôme.*

oit le polynôme

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots\ldots$$

tant x^m en facteur, je l'écris sous la forme

$$y = x^m.\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \ldots\ldots\right).$$

Le polynôme entre parenthèse est ordonné par rapport aux puissances croissantes de la variable $\frac{1}{x}$; en vertu du lemme précédent, on peut prendre $\frac{1}{x}$ assez petit, c'est-à-dire x assez grand, en valeur absolue, pour que le premier terme soit plus grand que la somme de tous les autres, et, par conséquent, donne son signe au polynôme.

Par exemple, le premier terme du polynôme

$$2x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 3x + 7$$

surpassera la somme de tous les autres pour toutes les valeurs de $\frac{1}{x}$ plus petites que $\frac{2}{8+2} = \frac{1}{5}$, et par conséquent pour toutes les valeurs de x plus grandes que 5, en valeur absolue.

128. Théorème. *Une fonction entière* f(x) *varie d'une manière continue quand* x *varie d'une manière continue.*

Si l'on donne à la variable x un accroissement h, la fonction éprouve l'accroissement (n° 82).

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)}{1.2}h^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}h^3 + \ldots\ldots$$

Le second membre étant un polynôme entier en h qui ne renferme pas de terme constant, on ne peut donner à h une valeur numérique assez petite pour que ce polynôme ait une valeur absolue plus petite que toute quantité donnée. Ainsi, à un accroissement infiniment petit de la variable correspond un accroissement infiniment petit de la fonction, et, par conséquent, lorsque la variable x varie d'une manière continue, la fonction varie aussi d'une manière continue.

). **Remarque.** Il est aisé de voir que si la variable x ente indéfiniment en valeur absolue, la fonction aug- aussi indéfiniment. En effet, mettons le polynôme

$$f(x) = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots\dots$$

a forme

$$f(x) = x^m\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \dots\dots\right).$$

l x est très-grand ou $\frac{1}{x}$ très-petit, la valeur de la thèse diffère très-peu de la quantité fixe a; le pre- acteur x^m augmente indéfiniment; donc le produit de- plus grand que toute quantité donnée.

posons, pour fixer les idées, le premier coefficient f; lorsque x tend vers $+\infty$, le polynôme tend aussi $+\infty$; lorsque x tend vers $-\infty$, le polynôme tend $-\infty$ s'il est de degré impair, et vers $+\infty$ s'il est de pair. Ainsi, lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, la fonc- arie de $-\infty$ à $+\infty$, si m est impair; si m est pair, art de $+\infty$ pour revenir à $+\infty$. Dans l'intervalle eut éprouver des alternatives de croissance et de dé- ance.

signe de la dérivée $f'(x)$ indique si la fonction croît ou lt; cette dérivée, étant un polynôme entier en x rve toujours le signe de son premier terme au delà certaine limite, à partir de laquelle la fonction n'é- era plus aucune alternative d'augmentation et de di- ion. En supposant comme précédemment le premier ient positif, la dérivée restera constamment positive fonction ira en augmentant indéfiniment, à partir certaine valeur de x.

130. Ceci résulte de la continuité de la fonctic
plus petit que b, et supposons, par exemple, q
lynôme $f(x)$ ait une valeur négative pour $x =$
valeur positive pour $x = b$. Si l'on imagine que
d'une manière continue de a à b, la fonction vari
manière continue, allant d'une valeur négativ
valeur positive; comme elle reste finie, elle dev
sairement, dans l'intervalle, passer par la vale
médiaire zéro. Ainsi, la fonction $f(x)$ s'annule pou
leur de x comprise entre a et b; cette valeur de x
de l'équation $f(x) = 0$.

Il est possible que la fonction passe plusieurs
zéro dans l'intervalle de a à b; dans ce cas, l'équati
plusieurs racines réelles comprises entre a et b.

Toute fonction finie et continue jouit évidemm
même propriété.

UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE DE DEGRÉ IMPAIR A
UNE RACINE RÉELLE.

131. On appelle équation algébrique une équa

une valeur négative très-grande, le polynôme prend une valeur de même signe que celle de son premier terme, c'est-à-dire une valeur négative, puisque ce dernier terme est de degré impair. Au contraire, si l'on donne à x une valeur positive très-grande, le polynôme prend une valeur positive. Ainsi, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, le polynôme $f(x)$ change de signe et s'annule au moins une fois; donc l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine réelle.

Cette racine réelle a un signe contraire à celui du dernier terme de l'équation. Supposons d'abord que le dernier terme, c'est-à-dire le terme indépendant de x, soit négatif; pour $x = 0$, le polynôme, se réduisant à son dernier terme, a une valeur négative; pour une valeur très-grande positive, il a une valeur positive; donc le polynôme change de signe quand x varie de 0 à $+\infty$ et, par conséquent, l'équation admet une racine positive. Supposons maintenant que le dernier terme soit positif; pour $x = -\infty$, le polynôme est négatif, pour $x = 0$ il est positif; il change donc de signe quand x varie de $-\infty$ à 0 et, par conséquent, l'équation admet une racine négative.

On peut affirmer, par exemple, que l'équation

$$x^3 - 5x^2 + 4x - 7 = 0$$

a au moins une racine réelle positive, et que l'équation

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 7 = 0$$

a au moins une racine réelle négative.

UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE DE DEGRÉ PAIR, DONT LE DERNIER TERME EST NÉGATIF, A AU MOINS DEUX RACINES RÉELLES.

132. Pour $x = 0$, le polynôme, se réduisant à son dernier terme, a une valeur négative. D'ailleurs, une valeur

de x très-grande, soit positive, soit négative, rend le polynôme positif, puisque son premier terme, qui est de degré pair, reste toujours positif. Ainsi le polynôme change deux fois de signe, une fois de o à $+\infty$, une seconde fois de o à $-\infty$; donc, l'équation admet au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

Par exemple, l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x - 2 = 0$$

admet au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

Il n'est qu'un cas où l'on ne sait pas si l'équation admet des racines réelles : c'est celui où l'équation, étant de degré pair, a son dernier terme positif; car, dans ce cas, le polynôme a des valeurs positives pour $x=0$ et pour des valeurs de x très-grandes, positives ou négatives. Ainsi, on ne sait pas si l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x + 2 = 0$$

admet des racines réelles.

TOUTE ÉQUATION ALGÉBRIQUE $f(x) = 0$, A COEFFICIENTS RÉELS OU IMAGINAIRES DE LA FORME $a + b\sqrt{-1}$, A UNE RACINE RÉELLE OU IMAGINAIRE DE LA MÊME FORME. — (On ne demandera pas à l'examen la démonstration de ce théorème.)

Nous admettrons ce théorème sans démonstration, nous bornant à en préciser le sens.

Si dans un polynôme entier $f(x)$ on remplace x par la quantité imaginaire $a + bi$, et que l'on développe chaque puissance de x de la manière indiquée au n° 51, on trouvera une quantité de la forme $A + Bi$; multipliant

puissance par le coefficient, on obtiendra un résultat même forme; réunissant enfin les parties réelles et les s imaginaires, on arrivera à un résultat final de la P + Qi. Or on dit qu'une quantité imaginaire P + Qi ulle lorsque les deux quantités réelles P et Q sont séparément. Le théorème signifie que l'on peut déner a et b de telle sorte que l'on ait à la fois P = o, , et la valeur $x = a + bi$ est dite racine de l'équation.

EST RACINE D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE, LE PREMIER MEMBRE EST DIVISIBLE PAR $x - a$.

3. Soit $f(x)$ un polynôme entier du degré m ordonné apport aux puissances décroissantes de x, on peut er ce polynôme par $x - a$ et pousser l'opération jusce qu'on arrive à un reste indépendant de x. Si l'on lle $\varphi(x)$ le quotient qui est un polynôme entier du 1e degré, et R le reste constant, on aura

$$f(x) = (x - a)\varphi(x) + R.$$

égalité est vraie, quelle que soit la valeur de x. Donà x la valeur particulière a, le premier terme du d membre s'évanouit, puisque le facteur $x - a$ devient t que l'autre facteur $\varphi(a)$ conserve une valeur finie; nt donc

$$f(a) = R.$$

, *quand on divise un polynôme entier par un binôme de me* x — a, *le reste de la division est le résultat que l'on t en remplaçant* x *par* a *dans ce polynôme.*

pposons maintenant que a soit racine de l'équation = o; cela signifie que, si l'on remplace x par a dans le

premier membre, on obtient un résultat $f(a)$ égal à zéro. Donc le reste R est nul, et l'on a

$$f(x) = (x - a)\,\varphi(x).$$

Ainsi, *lorsque* a *est racine d'une équation algébrique* f(x) = o, *le premier membre est divisible par* x — a.

Réciproquement, *si le premier membre est divisible par un binôme de la forme* x — a, *la quantité* a *est racine de l'équation.* En effet, dire que le polynôme $f(x)$ est divisible par $x - a$, c'est dire que le reste constant R auquel on arrive en effectuant la division est nul; donc la quantité $f(a)$ est égale à zéro et a est racine.

134. Nous allons maintenant indiquer une règle très-simple pour calculer le quotient.

Soit

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$$

le polynôme proposé.

Divisons ce polynôme par $x - a$,

$$\begin{array}{r|l}
A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} \ldots + A_{m-1}x + A_m & x - a \\
\hline
(A_0a + A_1)x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m & A_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + B_2x^{m-3} \ldots + B_{m-1} \\
(B_1a + A_2)x^{m-2} + A_3x^{m-3} \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m & \\
(B_2a + A_3)x^{m-3} \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(B_{m-2}a + A_{m-1})x + A_m & \\
\text{Reste} \ldots\ldots\ldots \quad B_{m-1}a + A_m &
\end{array}$$

Le premier terme du quotient est A_0x^{m-1}; multiplions ce terme par le diviseur $x - a$, et retranchons du dividende; le produit par x détruit le premier terme du dividende, le produit par $-a$ donne la quantité A_0ax^{m-1} qui s'ajoute au second terme; ainsi le premier reste ou second dividende a pour premier terme $(A_0a + A_1)x^{m-1}$, les termes

suivants étant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par x, on aura le second terme B_1x^{m-2} du quotient, en représentant pour abréger $A_0a + A_1$ par B_1 ; multiplions ce second terme par $x-a$, le roduit par x détruit le premier terme du second dividende, produit par $-a$ donne la quantité B_1ax^{m-2} qui s'ajoute u second terme ; ainsi le troisième dividende a pour premier terme $(B_1a + A_2)x^{m-2}$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce remier terme par x, on aura le troisième terme B_2x^{m-3} du uotient, en représentant B_1a+A_2 par B_2, et ainsi de suite. Cette loi est générale : *on obtient un coefficient quelconque du quotient en multipliant le coefficient précédent par et ajoutant le coefficient du terme de même rang dans le olynôme proposé.*

On arrivera ainsi au dernier dividende

$$(B_{m-2}a + A_{m-1})x + A_m,$$

qui donnera le dernier terme B_{m-1} du quotient, B_{m-1} représentant la quantité $B_{m-2}a + A_{m-1}$; en multipliant ce dernier terme par $x-a$ et retranchant du dernier dividende, on aura le reste de la division $B_{m-1}a + A_m$. On voit par là que le reste de la division se forme au moyen du dernier terme du quotient suivant la même loi, en multipliant le dernier terme du quotient par a et ajoutant le dernier terme du dividende.

Les coefficients du quotient, formés d'après cette loi, ont pour valeurs

$$B_1 = A_0a + A_1,$$
$$B_2 = A_0a^2 + A_1a + A_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$B_{m-1} = A_0a^{m-1} + A_1a^{m-2} + \dots\dots + A_{m-1},$$

et le reste de la division

$$R = B_{m-1}a + A_m = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots\ldots + A_m.$$

Exemples.

1° Diviser par $x - 3$ le polynôme

$$2x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 5x + 12.$$

L'application de la règle précédente donne le quotient

$$2x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 4.$$

Après avoir écrit le premier coefficient 2, on dira : 2 multiplié par 3 ..... 6 et — 8 ..... — 2 ; — 2 multiplié par 3 ..... — 6 et + 7 ..... + 1 ; + 1 multiplié par 3 ..... + 3 et — 6 ..... — 3 ; — 3 multiplié par 3 ..... — 9 et + 5 ..... — 4. Si l'on multiplie le dernier terme du quotient par 3 et que l'on ajoute le dernier terme 12 du dividende, on trouve le reste 0; donc 3 est racine de l'équation obtenue en égalant le polynôme proposé à zéro.

2° Diviser par $x + 2$ le polynôme

$$2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 5.$$

En opérant de la même manière, on trouve le quotient

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 6.$$

Ici $a = -2$, on dira donc : 2 multiplié par — 2 ..... — 4 et + 1 ..... — 3 ; — 3 multiplié par — 2 ..... + 6 et — 10 ..... — 4 ; — 4 multiplié par — 2 ..... + 8 et — 2 ..... + 6. En multipliant le dernier terme du quotient par — 2 et ajoutant + 5, on obtient le reste — 7 de la division. Donc — 2 n'est pas racine.

3° Diviser par $x - 2$ le polynôme

$$x^8 - 13x^5 + 7x^4 + 13x^2 + 2x - 8.$$

Le polynôme n'est pas complet ; il ne contient pas de termes en x^7, en x^6 et en x^3 ; on imaginera le polynôme complété au moyen de coefficients nuls et écrit sous la forme

$$x^8 + 0x^7 + 0x^6 - 13x^5 + 7x^4 + 0x^3 + 13x^2 + 2x - 8;$$

puis on appliquera la règle ordinaire. Le quotient est

$$x^7 + 2x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 3x^3 - 6x^2 + x + 4$$

et le reste nul. Donc 2 est racine.

UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE DU DEGRÉ m A TOUJOURS m RACINES RÉELLES OU IMAGINAIRES, ET ELLE NE PEUT EN AVOIR DAVANTAGE. — DÉCOMPOSITION DU PREMIER MEMBRE EN FACTEURS DU PREMIER DEGRÉ.

135. Soit $f(x)$ un polynôme entier du degré m. Nous avons admis que l'équation $f(x) = 0$ a toujours une racine a réelle ou imaginaire, et nous avons démontré que le polynôme $f(x)$ est divisible par $x - a$. En appelant X_1 le quotient qui est un polynôme entier du degré $m - 1$, on a

$$f(x) = (x - a)X_1.$$

Mais l'équation $X_1 = 0$ admet de même une racine b, et le polynôme X_1 est divisible par $x - b$, ce qui donne

$$X_1 = (x - b)X_2,$$

le quotient X_2 étant un polynôme entier du degré $m - 2$.

et le reste de la division

$$R = B_{m-1}a + A_m = A_0a^m + A_1a^{m-1} + \ldots\ldots + A_m.$$

Exemples.

1° Diviser par $x - 3$ le polynôme

$$2x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 5x + 12.$$

L'application de la règle précédente donne le quotient

$$2x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 4.$$

Après avoir écrit le premier coefficient 2, on dira : 2 multiplié par 3 ..... 6 et — 8 ..... — 2 ; — 2 multiplié par 3 ..... — 6 et + 7 ..... + 1 ; + 1 multiplié par 3 ..... + 3 et — 6 ..... — 3 ; — 3 multiplié par 3 ..... — 9 et + 5 ..... — 4. Si l'on multiplie le dernier terme du quotient par 3 et que l'on ajoute le dernier terme 12 du dividende, on trouve le reste 0 ; donc 3 est racine de l'équation obtenue en égalant le polynôme proposé à zéro.

2° Diviser par $x + 2$ le polynôme

$$2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 5.$$

En opérant de la même manière, on trouve le quotient

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 6.$$

Ici $a = -2$, on dira donc : 2 multiplié par — 2 ..... — 4 et + 1 ..... — 3 ; — 3 multiplié par — 2 ..... + 6 et — 10 ..... — 4 ; — 4 multiplié par — 2 ..... + 8 et — 2 ..... + 6. En multipliant le dernier terme du quotient par — 2 et ajoutant + 5, on obtient le reste — 7 de la division. Donc — 2 n'est pas racine.

3° Diviser par $x - 2$ le polynôme

$$x^8 - 13x^5 + 7x^4 + 13x^2 + 2x - 8.$$

Le polynôme n'est pas complet ; il ne contient pas de termes en x^7, en x^6 et en x^3 ; on imaginera le polynôme complété au moyen de coefficients nuls et écrit sous la forme

$$x^8 + 0x^7 + 0x^6 - 13x^5 + 7x^4 + 0x^3 + 13x^2 + 2x - 8 ;$$

puis on appliquera la règle ordinaire. Le quotient est

$$x^7 + 2x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 3x^3 - 6x^2 + x + 4$$

et le reste nul. Donc 2 est racine.

TOUTE ÉQUATION ALGÉBRIQUE DU DEGRÉ m A TOUJOURS m RACINES RÉELLES OU IMAGINAIRES, ET ELLE NE PEUT EN AVOIR DAVANTAGE. — DÉCOMPOSITION DU PREMIER MEMBRE EN FACTEURS DU PREMIER DEGRÉ.

135. Soit $f(x)$ un polynôme entier du degré m. Nous avons admis que l'équation $f(x) = 0$ a toujours une racine a réelle ou imaginaire, et nous avons démontré que le polynôme $f(x)$ est divisible par $x - a$. En appelant X_1 le quotient qui est un polynôme entier du degré $m - 1$, on a

$$f(x) = (x - a)X_1.$$

Mais l'équation $X_1 = 0$ admet de même une racine b, et le polynôme X_1 est divisible par $x - b$, ce qui donne

$$X_1 = (x - b)X_2,$$

le quotient X_2 étant un polynôme entier du degré $m - 2$.

138. Remarque I. — Dans cette démonstration, nous nous appuyons sur ce principe que, pour qu'un produit de plusieurs facteurs soit nul, il est nécessaire et il suffit que l'un des facteurs soit nul. Ce principe est évident quand les facteurs sont réels; mais il a besoin de quelques explications quand les facteurs sont imaginaires.

On appelle *module* d'une quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ le nombre positif $\sqrt{a^2 + b^2}$.

On dit qu'une quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ est nulle, quand on a séparément $a = 0$ et $b = 0$. On voit que, lorsqu'une quantité imaginaire est nulle, son module est nul, et que réciproquement, si le module est nul, la quantité imaginaire est nulle; car la somme des deux nombres positifs a^2 et b^2 ne peut devenir nulle que si ces deux nombres sont nuls séparément.

Considérons le produit de deux quantités imaginaires.

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= aa' + ab'i + ba'i + bb'i^2 \\ &= (aa' - bb') + (ab' + ba')i;\end{aligned}$$

ce produit a pour module

$$\begin{aligned}\sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2} &= \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}.\end{aligned}$$

On voit par là que le *module d'un produit de plusieurs facteurs est égal au produit des modules*. Ce théorème s'étend évidemment à un nombre quelconque des facteurs.

Cela posé, soit le produit de plusieurs quantités imaginaires

$$A + Bi = (a + bi)(a' + b'i)(a'' + b''i)\ldots\ldots$$

Le module du produit étant égal au produit du module, on a

$$A^2 + B^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)(a''^2 + b''^2).\ .\ .\ .\ .$$

r que le produit soit nul, il est nécessaire et il suffit que module soit nul; ce module étant égal au produit de ieurs nombres positifs, il est nécessaire et il suffit que d'eux soit nul, c'est-à-dire que l'une des quantités imaires soit nulle.

39. Remarque II. — Nous pouvons maintenant préciser ntage le sens du théorème démontré au n° 128. Nous s dit que, lorsque deux nombres réels, que nous appelns x_0 et x_1, mis à la place de x dans le polynôme $f(x)$, nent des résultats de signes contraires, ces deux nom comprennent au moins une racine réelle de l'équation $= 0$. (Il est bien entendu que l'équation est supposée r tous ses cofficients réels.) Nous pouvons ajouter que, s deux nombres comprennent plus d'une racine, ils en prennent un nombre impair, et que, en outre, lorsque les x nombres x_0 et x_1 donnent des résultats de même signe, ie comprennent aucune racine, ou en comprennent un bre pair.

ésignons par a, b,....., e les diverses racines comprises x_0 et x_1, et écrivons le polynôme $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = (x - a)(x - b) \ldots\ldots (x - e)\,\varphi(x),$$

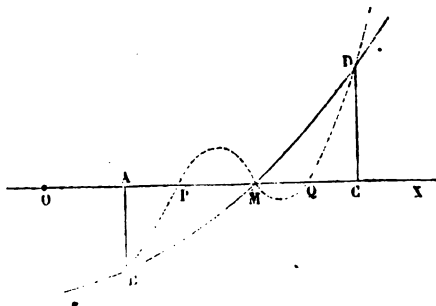
) représentant le produit des facteurs qui correspondent autres racines. En remplaçant x successivement par x_0 x_1, on a

$$f(x_0) = (x_0 - a)(x_0 - b) \ldots\ldots (x_0 - e)\,\varphi(x_0),$$
$$f(x_1) = (x_1 - a)(x_1 - b) \ldots\ldots (x_1 - e)\,\varphi(x_1).$$

s remarquerons d'abord que $\varphi(x_0)$ et $\varphi(x_1)$ sont des ntités de même signe ; autrement, les deux nombres

x_0 et x_1 comprendraient encore une autre racine, ce qui est contraire à l'hypothèse. Supposons x_0 plus petit que x_1: le nombre x_1 étant plus grand que les racines a, b......, e, chacun des facteurs $x_1 - a$, $x_1 - b$,..... $x_1 - e$, est positif; donc $f(x_1)$ a le signe de $\varphi(x_1)$. Le nombre x_0 étant plus petit que les racines a, b,..... e, chacun des facteurs $x_0 - a$, $x_0 - b$,..... $x_0 - e$, est négatif. Si le nombre de ces facteurs est pair, $f(x_0)$ aura le même signe que $\varphi(x_0)$, et, par conséquent, que $f(x_1)$; si le nombre des facteurs est impair, $f(x_0)$ aura un signe contraire à celui de $\varphi(x_0)$, et par conséquent contraire à celui de $f(x_1)$. Ainsi les deux résultats $f(x_0)$ et $f(x_1)$ ont le même signe ou des signes contraires, selon que le nombre des racines réelles comprises entre x_0 et x_1 est pair ou impair.

Des considérations géométriques très-simples font bien comprendre cette proposition. Imaginons que l'on représente par une courbe la fonction $f(x)$, comme nous l'avons expliqué au nº 84, en portant sur un axe horizontal OX, à partir d'un point fixe O les valeurs de x, et élevant des per-

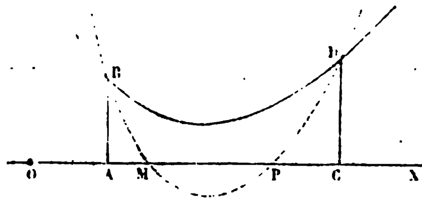


pendiculaires ou ordonnées égales aux valeurs correspondantes de la fonction, dans un sens ou dans l'autre, suivant le signe. Les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ correspondent aux points où l'ordonnée devient nulle, c'est-à-dire

à la courbe coupe l'axe OX. Si la courbe coupe l'axe au
oint M, la longueur OM est une racine de l'équation.

Supposons que deux valeurs OA et OC de la variable x
nnent au polynôme des valeurs de signes contraires — AB
+ CD; pour aller du point B au point D, la courbe devra
cessairement couper l'axe OX en un certain point M, et
quation admettra une racine OM comprise entre OA et OC.
is la courbe peut couper l'axe en plusieurs points,
mme le montre la ligne ponctuée; dans ce cas elle le
upe en un nombre impair de points P, M, Q.

Supposons maintenant que les deux valeurs OA et OC de
variable u donnent à la fonction des valeurs + AB et
CD de même signe. En général, la courbe ira du point



au point D sans rencontrer l'axe OX, et l'équation n'aura
s de racine dans l'intervalle; si elle coupe l'axe, elle le
upera en un nombre pair de points M, P, et l'équation
ra un nombre pair de racines dans l'intervalle.

RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE ET LES RACINES.

140. Supposons que l'on ait divisé tous les termes de
quation par le premier coefficient, afin de la ramener à
forme

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m = 0.$$

Cette équation a m racines a, b, c,..... k, et nous avons démontré que le premier membre $f(x)$ peut être décomposé en un produit de m facteurs binômes

$$(x-a)(x-b)(x-c) \ldots\ldots (x-k).$$

Si l'on effectue ce produit, il est clair que l'on reproduira identiquement le polynôme proposé. Or si l'on appelle S_1 la somme des racines, S_2 la somme des produits des racines deux à deux, S_3 la somme des produits trois à trois,....., le produit des m facteurs binômes, d'après la formule établie au n° 43, se développera de la manière suivante :

$$x^m - S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} - S_3x^{m-3} + \ldots\ldots \pm S_m.$$

En égalant les coefficients des deux polynômes, on a donc

$$A_1 = -S_1, \quad A_2 = +S_2, \quad A_3 = -S_3, \; \ldots\ldots$$

Ainsi, *quand le premier coefficient de l'équation est l'unité, 1° la somme des racines égale le second coefficient changé de signe; 2° la somme des produits des racines deux à deux égale le troisième coefficient; 3° la somme des produits des racines trois à trois égale le quatrième coefficient changé de signe, et ainsi de suite. Enfin le produit des racines égale le dernier terme pris avec son signe ou un signe contraire, suivant que* m *est pair ou impair.*

Exemples.

1° Nous avons déjà reconnu ces relations dans l'équation du second degré (1re partie, n° 145). Si l'on appelle a, b, c, les trois racines d'une équation du troisième degré

$$x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0,$$

on a

$$a+b+c=-A_1, \quad ab+ac+bc=A_2, \quad abc=-A_3.$$

2° Résoudre une équation du troisième degré, sachant que l'une des racines est égale à la somme des deux autres. Supposons que la racine a soit égale à la somme $b+c$ des deux autres. De la première relation $a+b+c=-A_1$ on tire $2a=-A_1$, d'où $a=-\frac{A_1}{2}$. La seconde relation s'écrivant $a(b+c)+bc=A_2$ donne $bc=A_2-a^2=A_2-\frac{A_1^2}{4}$; donc les deux autres racines sont fournies par l'équation du second degré

$$x^2+\frac{A_1}{2}x+\left(A_2-\frac{A_1^2}{4}\right)=0.$$

La troisième relation donne $bc=-\frac{A_3}{a}=\frac{2A_3}{A_1}$.

Pour que les racines de l'équation du troisième jouissent de la propriété énoncée, il faut donc que les coefficients de l'équation satisfassent à la relation

$$\frac{2A_3}{A_1}=A_2-\frac{A_1^2}{4}.$$

LORSQU'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE, DONT LES COEFFICIENTS SONT RÉELS, A UNE RACINE IMAGINAIRE DE LA FORME $a+b\sqrt{-1}$, ELLE A AUSSI POUR RACINE L'EXPRESSION CONJUGUÉE $a-b\sqrt{-1}$.

141. Nous avons dit que, lorsque dans le polynôme $f(x)$ on remplace x par $a+bi$, le polynôme acquiert une valeur de la forme $P+Qi$. Remplaçons maintenant x par la quantité imaginaire conjuguée $a-bi$; si tous les coefficients sont

réels, il est clair que la valeur du polynôme ne différera de la précédente qu'en ce que i aura été changé en $-i$; on aura donc la quantité conjuguée $P - Qi$.

Si $a + bi$ est racine de l'équation $f(x) = 0$, le premier résultat est nul, et l'on a séparément $P = 0$, $Q = 0$; donc le second résultat est également nul, et la quantité $a - bi$ est aussi racine de l'équation. Ainsi, dans une équation algébrique dont les coefficients sont réels, les racines imaginaires sont conjuguées deux à deux, et par conséquent leur nombre est toujours pair.

Cette proposition n'est vraie que si tous les coefficients de l'équation sont réels; car s'il y a des coefficients imaginaires, quand on remplace $a + bi$ par $a - bi$, on change le signe i dans la valeur de x, mais non dans les coefficients qui restent constants; on ne peut plus dire alors que le second résultat sera conjugué du premier.

142. Nous avons démontré qu'un polynôme du degré m se décompose en m facteurs du premier degré; mais, parmi ces facteurs, les uns sont réels, les autres imaginaires. Supposons les coefficients réels et considérons les deux facteurs

$$(x - a - bi)(x - a + bi),$$

qui correspondent à deux racines imaginaires conjuguées; le produit de ces deux facteurs

$$(x - a)^2 + b^2$$

est un polynôme réel du second degré.

Ainsi *un polynôme à coefficients réels se décompose en facteurs réels du premier ou du second degré.*

143. REMARQUE. Dans ce qui précède, nous avons supposé les coefficients réels; supposons-les, non-seulement

els, mais encore commensurables; dans ce cas, si l'é-
ation admet une raison incommensurable de la forme $+\sqrt{b}$, a et b étant des nombres commensurables, elle lmettra la racine conjuguée $a-\sqrt{b}$. Concevez, en effet, le l'on remplace dans le polynôme x par $a+\sqrt{b}$ et que n développe les diverses puissances de $a+\sqrt{b}$, suivant loi du binôme; comme les puissances paires de sont rationnelles et les puissances impaires de la forme $\sqrt{b}$, B étant une quantité rationnelle, il est clair que l'on rivera à une expression de la forme $P+Q\sqrt{b}$, en dési- ant par P et Q des quantités commensurables. Rem- içons maintenant x par $a-\sqrt{b}$; si tous les coefficients nt commensurables, la valeur du polynôme ne différera de précédente que par le signe de $\sqrt{b}$, et l'on obtiendra la iantité conjuguée $P-Q\sqrt{b}$. Pour que $a+\sqrt{b}$ soit racine l'équation, c'est-à-dire pour que la quantité $P+Q\sqrt{b}$ it nulle, il faut que l'on ait séparément $P=0$, $Q=0$; nc $a-\sqrt{b}$ est aussi racine de l'équation.

Cette propriété, qui a de l'analogie avec la précédente, est aucoup moins générale; il arrive rarement que l'équation lmette une racine de la forme $a+\sqrt{b}$; lorsque cela a lieu, premier membre admet un facteur du second degré

$$(x-a-\sqrt{b})(x-a+\sqrt{b})=(x-a)^2-b$$

coefficients commensurables.

NS UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE COMPLÈTE OU INCOMPLÈTE, LE NOMBRE DES RACINES POSITIVES NE PEUT SURPASSER LE NOMBRE DES VARIATIONS. — CONSÉQUENCE RELATIVE AUX RACINES NÉGATIVES.

144. Lorsqu'un polynôme à coefficients réels est ordonné

par rapport aux puissances décroissantes de x, deux termes consécutifs affectés de signes contraires présentent ce qu'on nomme une *variation*. Par exemple, l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 8 = 0$$

a trois variations : une du premier au second terme, une du troisième au quatrième, une du cinquième au sixième. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

LEMME. *Lorsqu'on multiplie un polynôme par* $x-a$, a *étant un nombre positif, on introduit au moins une variation nouvelle dans le polynôme.*

Un polynôme quelconque, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, peut être écrit sous la forme.

$$A_m x^m \ldots\ldots + A_{n+1}x^{n+1} - A_n x^n \ldots\ldots - A_{p+1}x^{p+1} + A_p x^p \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots \pm A_{s+1}x^{s+1} \mp A_s x^s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mp A_0.$$

Le polynôme commence par un groupe de termes positifs, puis vient un groupe de termes négatifs, puis un groupe de termes positifs, et ainsi de suite jusqu'au dernier groupe qui commence au terme $\mp A_s x^s$, à partir duquel il n'y a plus de changement de signes. Chaque groupe contient un nombre quelconque de termes et même un seul terme. Les variations se présentent quand on passe du dernier terme d'un groupe au premier du groupe suivant.

En multipliant ce polynôme par $x - a$, nous aurons

$$\begin{array}{l|l|l|l} A_m x^{m+1} \ldots\ldots - A_n & x^{n+1} \ldots\ldots + A_p & x^{p+1} \ldots\ldots \mp A_s & x^{s+1} \ldots\ldots \\ \qquad\qquad - A_{n+1}a & \qquad + A_{p+1}a & \qquad \mp A_{s+1}a & \qquad\quad \pm A_0 a. \end{array}$$

La multiplication par x conserve à chaque terme son signe et donne la première ligne; la multiplication par $-a$ change tous les signes et donne la seconde ligne. Le pre-

ier terme $A_m x^{m+1}$ du produit a le signe $+$; le terme du gré $n+1$, provenant de l'addition de deux termes néga- s, a le signe $-$; quels que soient les signes des termes ermédiaires, il est certain qu'entre ces deux termes de nes contraires, il y a au moins une variation ; on re- uve ainsi au produit la première variation du multipli- nde, celle qui a lieu de x^m à x^n. De même le terme du gré $p+1$, provenant de l'addition de deux termes posi- s, a le signe $+$; entre les deux termes en x^{n+1} et en $^{+1}$, qui sont de signes contraires, il y a au moins une riation, et l'on retrouve ainsi au produit la seconde va- tion du multiplicande, celle qui a lieu de x^n à x^p. Pour nplifier le raisonnement, nous pouvons réduire le mul- licande aux premiers termes des différents groupes, et considérer dans le produit que les termes correspon- nts, c'est-à-dire ceux dont le degré est supérieur d'une ité ; ces termes du produit étant affectés des mêmes nes que les termes correspondants du multiplicande, il t clair que l'on retrouve au produit toutes les variations multiplicande. Ainsi quand on sera arrivé au terme en $^{+1}$, on aura retrouvé au produit toutes les variations du ultiplicande. A partir du terme en x^s, le multiplicande ne ésente plus aucune variation ; mais le terme constant A_0 du multiplicande, multiplié par $-a$, donne le der- er terme $\pm A_0 a$ du produit ; ce dernier terme ayant un ne contraire à celui du terme en x^{s+1}, le dernier groupe produit contiendra encore au moins une variation. On en nclut que le produit contient au moins une variation de us que le multiplicande.

Il peut arriver que la multiplication par $x-a$ introduise us d'une variation nouvelle ; dans ce cas elle en introduit 3, ou 5,....., en général un nombre impair. En effet,

dans chacun des groupes du produit, nous avons retrouvé la variation correspondante du multiplicande : mais, dans ce groupe, il peut y avoir plus d'une variation; car les termes intermédiaires, provenant de l'addition de deux termes de signes contraires, ont des signes quelconques; mais lorsqu'il y en a plus d'une, il y a un nombre impair, c'est-à-dire une, plus un nombre pair, parce que entre deux termes de signes contraires il y a nécessairement un nombre impair de changements de signes; ainsi chaque groupe du produit pourra introduire un nombre pair de variations nouvelles. Le dernier groupe en introduit un nombre impair; en tout un nombre impair de variations nouvelles.

145. Théorème. *Dans une équation algébrique à coefficients réels, le nombre des racines positives ne peut surpasser le nombre des variations.*

Soit $f(x) = 0$ une équation à coefficients réels ayant un certain nombre de racines positives $a, b, c, \ldots, g$. Supposons le polynôme $f(x)$ décomposé en facteurs et désignons par $\varphi(x)$ le produit des facteurs binômes qui correspondent aux racines négatives et aux racines imaginaires conjuguées, nous aurons

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-g)\,\varphi(x).$$

D'après la remarque du n° 142, le polynôme $\varphi(x)$ a aussi ses coefficients réels. Or, si nous multiplions ce polynôme successivement par chacun des facteurs binômes $x-a$, $x-b, \ldots\ldots, x-g$, qui correspondent aux racines positives, chaque multiplication introduisant au moins une variation nouvelle, le produit final $f(x)$ contiendra au moins autant de variations qu'il y a de racines positives.

146. Remarque. *Si le nombre des racines positives n'est*

gal au nombre des variations, il en diffère d'un nombre

Nous remarquons d'abord que le polynôme $\varphi(x)$ a
lernier terme positif, sans quoi il aurait une racine
ve, ce qui est contraire à l'hypothèse; ce polynôme
ent donc un nombre pair de variations, s'il en contient.
re part, nous avons vu que la multiplication par cha-
les facteurs $x-a$ introduit un nombre impair de varia-
, c'est-à-dire une, plus un nombre pair; on aura ainsi
ment dans le polynôme $f(x)$ autant de variations qu'il
e racines positives, plus une somme de nombres pairs,
à-dire plus un nombre pair de variations.

r exemple, l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 8 = 0$$

nte trois variations. Elle ne peut admettre plus de trois
es positives; elle en aura trois ou une.

équation

$$x^7 - 5x^5 + 8x^4 - 4x + 6 = 0$$

nte quatre variations; elle ne peut admettre plus de
e racines positives; elle en aura quatre, ou deux, ou
lu tout.

équation

$$x^6 + 4x^3 - 5 = 0$$

nte une seule variation. Elle ne peut avoir plus d'une
e positive, et elle en a certainement une.

7. Corollaire. Si dans l'équation $f(x) = 0$, on change
$-x$, on obtient une nouvelle équation qui a évidem-
pour racines celles de la proposée changées de signes;
, les racines négatives de la première deviennent posi-
dans la seconde. Si donc on applique le théorème pré-

cédent à l'équation transformée, on aura une limite supérieure du nombre des racines négatives de l'équation proposée.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 8 = 0$$

en remplaçant x par $-x$, on obtient la transformée

$$-x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x - 8 = 0,$$

qui présente deux variations. Cette dernière équation admet au plus deux racines positives, et par conséquent la proposée a au plus deux racines négatives. Si elle n'en a pas deux, elle n'en a pas du tout.

De même l'équation

$$x^7 - 5x^3 + 8x^2 - 4x + 6 = 0$$

ayant pour transformée l'équation

$$-x^7 + 5x^3 + 8x^2 + 4x + 6 = 0,$$

qui présente une seule variation, a une racine négative et une seule. Nous avons vu déjà que cette équation a au plus quatre racines positives; elle admet donc au plus cinq racines réelles; comme elle a sept racines, puisqu'elle est du septième degré, il s'ensuit qu'elle a au moins deux racines imaginaires.

L'équation

$$x^6 + 4x^3 - 5 = 0$$

ayant pour transformée

$$x^6 - 4x^3 - 5 = 0,$$

a une racine négative, et une seule. Nous avons vu déjà qu'elle a une racine positive; donc, elle a en tout deux racines réelles, et, par conséquent, quatre racines imaginaires.

ECHERCHE DU PRODUIT DES FACTEURS DU PREMIER DEGRÉ COMMUNS A DEUX FONCTIONS ENTIÈRES DE x.

148. Supposons que deux fonctions entières de x aient décomposées en facteurs du premier degré, le produit facteurs du premier degré communs à ces deux polynes s'appelle leur ***plus grand commun diviseur algéque.***

e désigne par X et X_1 ces deux polynômes, ordonnés par port aux puissances décroissantes de x, en supposant X soit d'un degré supérieur ou égal à X_1. Je divise X X_1; j'appelle Q le quotient et X_2 le reste, ce qui donne

$$X = X_1 Q + X_2.$$

dis que le plus grand commun diviseur entre X et X_1 est même qu'entre X_1 et X_2. En effet, soit $x - a$ un facteur du mier degré commun à X et à X_1; si dans l'égalité prélente on fait $x = a$, X s'annule, de même X_1 et par suite produit $X_1 Q$, puisque le polynôme Q conserve une vaur finie; donc X_2, différence de deux quantités nulles, nnule aussi; donc ce polynôme X_2 est divisible par $x - a$. nsi tout facteur du premier degré commun à X et X_1 est mmun à X_1 et à X_2. On démontrerait de même que, récioquement, tout facteur du premier degré commun à X_1 à X_2 est commun à X et X_1. Les facteurs du premier degré mmuns étant les mêmes de part et d'autre, les produits ces facteurs communs, ou les plus grands communs dieurs, sont les mêmes.

Ainsi la question est ramenée à la recherche du plus and commun diviseur entre X_1 et X_2. On procédera de la ème manière : en divisant X_1 par X_2, et appelant X_3 le ste, on aura

$$X_1 = X_2 Q_1 + X_3.$$

Le plus grand commun diviseur entre X_1 et X_2 est le même qu'entre X_2 et X_3.

Divisons X_2 par X_3, et supposons que l'on trouve un reste nul ; il est clair que X_3, divisant exactement X_2, est le produit des facteurs du premier degré communs à X_2 et à X_3; c'est donc le plus grand commun diviseur cherché.

Ainsi, *pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes, après avoir ordonné ces deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes de* x, *on divise celui qui est du degré le plus élevé par l'autre, celui-ci par le reste de la division, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un reste nul. Le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur cherché.*

Dans ces opérations, les restes, et par suite les diviseurs successifs, vont en diminuant de degré ; on arrivera donc à un reste nul ou à un reste indépendant de x. Dans le premier cas, les deux polynômes admettent un plus grand commun diviseur algébrique d'un certain degré. Dans le second cas, ils n'en admettent pas, et sont dits premiers entre eux.

149. Remarque. Dans la pratique, afin d'éviter les coefficients fractionnaires, on peut multiplier tous les termes de l'un quelconque des polynômes par une quantité quelconque indépendante de x. De même, si l'on aperçoit un facteur commun aux coefficients de tous les termes d'un certain reste, on peut le supprimer. Je suppose, par exemple, que pour effectuer la première division on ait multiplié le dividende par un nombre A, et qu'ensuite on ait divisé tous les termes du reste par le nombre B, on aura

$$AX = X_1 Q + BX_2.$$

On reprendra sur cette égalité les raisonnements précédents : si la quantité a, mise à la place de x, annule X et X_1, elle annulera aussi BX_2; et comme le facteur B est constant et différent de zéro, elle annulera nécessairement X_2, etc. Ainsi rien n'est changé dans la recherche du plus grand commun diviseur.

RECHERCHE DES RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS DONT LES PREMIERS MEMBRES SONT DES FONCTIONS ENTIÈRES DE L'INCONNUE.

150. Si les deux équations

$$X = 0, \qquad X_1 = 0$$

nt n racines communes, les deux polynômes X et X_1 admettent n facteurs du premier degré communs, et, par conséquent, ils ont un plus grand commun diviseur du degré n. Pour trouver les racines communes à deux équations, on cherchera donc le plus grand commun diviseur des deux premiers membres de ces équations; soit D ce plus grand commun diviseur, l'équation

$$D = 0$$

donnera les racines communes aux deux équations.

Si les deux polynômes n'ont pas de plus grand commun diviseur algébrique, les deux équations n'ont pas de racine commune. Si le plus grand commun diviseur est du premier degré, il y a une racine commune; s'il est du second degré, il a deux racines communes, etc.

Exemples.

1° Trouver les racines communes aux deux équations

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0,$$
$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0.$$

Voici le détail des opérations :

$$
\begin{array}{r|r|r}
 & x - 1 & 2x + 1 \\
x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 & 2x^3 - 5x^2 + x + 2 & x^2 - 3x + 2 \\
\hline
2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x + 4 & -2x^3 + 6x^2 - 4x & \\
\cline{2-2}
-2x^4 + 5x^3 - x^2 - 2x & x^2 - 3x + 2 & \\
\cline{1-1}
- x^3 + 5x^2 - 8x + 4 & 0 & \\
-2x^3 + 10x^2 - 16x + 8 & & \\
+2x^3 - 5x^2 + x + 2 & & \\
\cline{1-1}
5x^2 - 15x + 10 & & \\
x^2 - 3x + 2 & &
\end{array}
$$

On a multiplié deux fois le premier dividende par 2 afin d'éviter les fractions, et on a simplifié le reste en le divisant par 5. Le plus grand commun diviseur des deux polynômes est $x^2 - 3x + 2$. Il y a donc deux racines communes qui seront données par l'équation

$$x^2 - 3x + 2 = 0;$$

ces deux racines communes sont 1 et 2.

2° Résoudre l'équation

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0,$$

sachant que l'une des racines surpasse une autre racine de 2. Posons $x = x' + 2$, et remplaçons x par cette valeur dans

quation proposée, nous formerons la nouvelle équation

$$(x'+2)^4-4(x'+2)^3+4(x'+2)^2-4(x'+2)+3=0,$$

, en développant et supprimant l'accent,

$$x^4+4x^3+4x^2-4x-5=0.$$

la relation $x=x'+2$, on déduit $x'=x-2$; les va-rs de x', ou les racines de la nouvelle équation, sont érieures de deux unités aux valeurs de x, c'est-à-dire racines de l'équation proposée; celle-ci ayant deux ra-es telles que a et $a+2$, la seconde admettra les racines -2 et a; il en résulte que les deux équations ont une ra-e commune a, et, par suite, les deux polynômes un plus nd commun diviseur du premier degré. En cherchant ce s grand commun diviseur, on trouve $x-1$. Ainsi l'équa-n proposée admet la racine 1 et, par conséquent, la ra-e $1+2$ ou 3; connaissant deux racines, la division par -1 et par $x-3$ ramènera l'équation à une équation du ond degré $x^2+1=0$, qui donnera les deux autres ra-es.

IMENT ON RECONNAÎT QU'UNE ÉQUATION A DES RACINES ÉGALES ET COMMENT ALORS ON RAMÈNE SA RÉVOLUTION A CELLES D'AUTRES ÉQUATIONS DE DEGRÉ MOINDRE, DONT LES RACINES SONT INÉGALES.

151. Nous avons expliqué (n° 135) comment on décom-se un polynôme entier $f(x)$ du degré m en un produit m facteurs du premier degré

$$f(x)=A(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-k).$$

te décomposition ne suppose pas que les quantités a, b,

$c, \ldots, k$, soient différentes les unes des autres. Si parmi ces quantités plusieurs sont égales entre elles, on dit que l'équation a des racines égales.

Supposons $b = a$; le polynôme contient le facteur $(x-a)^2$, et la racine a est dite racine *double*. De même, si $a = b = c$, le polynôme contient le facteur $(x-a)^3$ et la racine a est racine *triple*. En général, lorsque le polynôme contient le facteur $(x-a)^n$, on dit que l'équation a n racines égales à a, ou que la racine a est du degré n de multiplicité. De cette manière, les théorèmes généraux sur les équations subsistent : ainsi, en tenant compte du degré de multiplicité des racines, une équation du degré m a toujours m racines, etc.

152. Théorème *Une racine d'ordre* n *annule le polynôme et ses* n — 1 *premières dérivées, et réciproquement.*

Soit $f(x) = 0$ l'équation proposée. Nous pouvons écrire $f(x) = f(a + x - a)$, et, regardant $x - a$ comme un accroissement, développer suivant la loi connue ; nous aurons

$$(1) \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \ldots..$$

Le premier terme $f(a)$ étant nul, puisque a est racine, on peut diviser par $x - a$, ce qui donne

$$\frac{f(x)}{x-a} = \frac{f'(a)}{1} + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a) + \frac{f'''(a)}{1.2.3}(x-a)^2 + \ldots..$$

Si a est racine double, le quotient, devant contenir encore une fois le facteur $x - a$, s'annulera pour $x = a$; mais pour $x = a$, il se réduit à $f'(a)$; on a donc $f'(a) = 0$, et la racine double vérifie l'équation $f'(x) = 0$. En divisant par $x - a$, on obtient le nouveau quotient

$$\frac{f(x)}{(x-a)^2} = \frac{f''(a)}{1.2} + \frac{f'''(a)}{1.2.3}(x-a) + \ldots..$$

Si a est racine triple, ce dernier quotient, devant contenir encore le facteur $x-a$, s'annulera pour $x=a$, et l'on aura $f''(a)=0$. Ainsi une racine triple annule le polynôme $f(x)$ et ses deux premières dérivées. En effectuant la division, on a

$$\frac{f(x)}{(x-a)^3}=\frac{f'''(a)}{1.2.3}+\frac{f^{\text{IV}}(a)}{1.2.3.4}(x-a)+\ldots\ldots$$

Si a est racine quadruple, ce dernier quotient, devant contenir encore le facteur $x-a$, s'annulera pour $x=a$, et l'on aura $f'''(a)=0$. Ainsi une racine quadruple annule le polynôme et ses trois premières dérivées. En continuant ainsi de proche en proche, on voit qu'une racine du degré n de multiplicité annule le polynôme $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées.

La réciproque est vraie : si a annule le polynôme $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées, elle est racine du degré n de multiplicité de l'équation $f(x)=0$. Car le développement (1) se réduit alors à

$$f(x)=\frac{f^n(x)}{1.2\ldots\ldots n}(x-a)^n+\frac{f^{n+1}(a)}{1.2\ldots\ldots(n+1)}(x-a)^{n+1}+\ldots\ldots,$$

ou, en mettant $(x-a)^n$ en facteur, à

$$f(x)=(x-a)^n\left[\frac{f^n(a)}{1.2\ldots\ldots n}+\frac{f^{n+1}(a)}{1.2\ldots\ldots(n+1)}(x-a)+\ldots\ldots\right].$$

Le polynôme $f(x)$ contenant le facteur $(x-a)^n$, a est racine d'ordre n.

Il résulte de ces deux propositions qu'une racine d'ordre n annule le polynôme et ses $n-1$ premières dérivées, mais n'annule pas la dérivée suivante.

la dérivée suivante.

En général, une racine d'ordre n de l'équati
est racine d'ordre $n - 1$ de l'équation $f'(x) =$

154. COROLLAIRE II. Il résulte de là que *le*
commun diviseur entre un polynôme et sa dériv
duit des facteurs multiples qui composent le po
posé, l'exposant de chacun d'eux étant diminué
En effet, les racines simples de l'équation $f(x)$ =
fiant pas l'équation $f'(x) = 0$, les facteurs simp
nôme $f(x)$ n'entrent pas dans la dérivée $f'(x)$.
doubles de l'équation $f(x) = 0$ étant racines
l'équation $f'(x) = 0$, les facteurs carrés entrent
degré dans la dérivée. En général, soit $(x - a)$
multiple du polynôme proposé $f(x)$, la racine
étant racine d'ordre $n - 1$ de l'équation $f'(x)$ =
nôme $f'(x)$ contiendra le facteur $(x -)a^{n-1}$.

On peut démontrer directement cette proposi
nant la dérivée du polynôme proposé $f(x)$. Su
ce polynôme admette les facteurs multiple
$(x - b)^p$, $(x - c)^q$, et les facteurs simples $(x -$
de telle sorte que

$$
\begin{aligned}
x) = & nA(x-a)^{n-1}(x-b)^p\ (x-c)^q\ (x-d)(x-e)\ldots\ldots \\
& + pA(x-a)^n\ (x-b)^{p-1}(x-c)^q\ (x-d)(x-e)\ldots\ldots \\
& + qA(x-a)^n\ (x-b)^p\ (x-c)^{q-1}(x-d)(x-e)\ldots\ldots \\
& +\ A(x-a)^n\ (x-b)^p\ (x-c)^q\ (x-e)\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& +\ A(x-a)^n\ (x-b)^p\ (x-c)^q\ (x-d)\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

les termes contenant le facteur

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1},$$

ut écrire

$$f'(x) = A(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}$$

$$
\times \left[
\begin{aligned}
& n(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)\ldots\ldots \\
& + p(x-a)(x-c)(x-d)(x-e)\ldots\ldots \\
& + q(x-a)(x-b)(x-d)(x-e)\ldots\ldots \\
& +\ (x-a)(x-b)(x-c)(x-e)\ldots\ldots \\
& +\ (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right]
$$

voit déjà que le polynôme $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ adent le diviseur commun

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}.$$

le plus grand commun diviseur. En effet, dans l'exsion de $f'(x)$, tous les termes de la parenthèse, ex- le premier, contiennent le facteur $x-a$; si l'on fait a dans cette parenthèse, tous les termes s'annulant pté le premier, la parenthèse ne devient pas nulle; elle met donc pas le facteur $x-a$. De même, tous les es de la parenthèse contenant le facteur $x-b$, ex- le second, la parenthèse n'est pas divisible par $x-b$, nsi de suite. La parenthèse n'admet donc aucun des urs premiers $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, $x-e$, ..., omposent le polynôme proposé. On en conclut que le

plus grand commun diviseur entre les deux polynômes $f(x)$ et $f'(x)$ est bien

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}.$$

155. D'après cela, pour voir si une équation $f(x)=0$ a des racines égales, on cherchera le plus grand commun diviseur algébrique entre le polynôme $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$. Si ces deux polynômes n'ont pas de plus grand commun diviseur, on en conclut que l'équation proposée n'a pas de racines égales. Si ces deux polynômes ont un plus grand commun diviseur du premier degré, l'équation proposée a deux racines égales. Si le plus grand commun diviseur est du second degré, l'équation admet deux racines doubles ou une triple, etc.

Comme application, nous allons chercher la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients de l'équation du troisième degré

$$x^3+px+q=0,$$

pour que cette équation ait deux racines égales. Le polynôme x^3+px+q et sa dérivée $3x^2+p$ doivent admettre un commun diviseur du premier degré; si l'on effectue l'opération du plus grand commun diviseur, quand on sera arrivé à un diviseur du premier degré, on devra trouver un reste nul.

$$\begin{array}{r|c|l}
 & x & 3x-9q \\
x^3+px+q & 3x^2+p & 2px+3q \\
\cline{2-3}
3x^3+3px+3q & 6px^2+2p^2 & \\
-3x^3-px & -6px^2-9qx & \\
\cline{1-2}
2px+3q & -9qx+2p^2 & \\
 & -18pqx+4p^3 & \\
\cline{2-2}
 & 4p^3+27q^2. &
\end{array}$$

Ainsi la condition demandée est $4p^3 + 27q^2 = 0$, ou

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0.$$

L'équation $2px + 3q = 0$, obtenue en égalant le plus grand commun diviseur à zéro, donne la racine double $x = -\frac{3q}{2p}$. La somme des racines étant nulle, la troisième racine est $\frac{3q}{p}$.

Par exemple, les coefficients de l'équation

$$x^3 - 27x + 54 = 0$$

vérifiant la condition précédente; cette équation a deux racines égales à $+3$; la troisième racine est -6.

156. Nous allons expliquer maintenant comment on ramène la résolution d'une équation qui a des racines égales à celle d'autres équations de degré moindre dont les racines sont inégales. Soit $X = 0$ une équation qui admet des racines de différents ordres, par exemple, des racines simples, des racines doubles, triples ou quadruples. Si l'on désigne par X_1 le produit des facteurs simples, par X_2 le produit des facteurs binômes qui correspondent aux racines doubles, chacun étant pris seulement au premier degré, et de même par X_3 et X_4 les produits des facteurs binômes qui correspondent aux racines triples ou quadruples, on écrira le polynôme X sous la forme

$$X = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4.$$

Cherchons le plus grand commun diviseur D entre le polynôme X et sa dérivée; ce plus grand commun diviseur

étant égal au produit des facteurs multiples dont on diminue les exposants d'une unité, on aura

$$D = X_2 X_3^2 X_4^3.$$

De même, le plus grand commun diviseur entre le polynôme D et sa dérivée sera

$$D_1 = X_3 X_4^2,$$

et enfin le plus grand commun diviseur entre le polynome D_1 et sa dérivée sera

$$D_2 = X_4.$$

En divisant deux à deux les polynômes précédents, on obtient les quotients

$$\frac{X}{D} = Q = X_1 X_2 X_3 X_4,$$
$$\frac{D}{D_1} = Q_1 = X_2 X_3 X_4,$$
$$\frac{D_1}{D_2} = Q_2 = X_3 X_4.$$

Divisant chacun de ces nouveaux polynômes par le suivant, on a enfin

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1,$$
$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_2,$$
$$\frac{Q_2}{D_2} = X_3,$$
$$D_2 = X_4.$$

Une fois trouvés ces polynômes X_1, X_2, X_3, X_4, la résolution de l'équation proposée est ramenée à celle des équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0,$$

n'ont plus de racines égales; la première donne les ra-s simples de l'équation proposée, la seconde les racines bles, la troisième les racines triples, etc.

insi, *pour ramener la résolution d'une équation qui a acines égales à celles d'autres équations de degré moindre nt leurs racines inégales, on cherche le plus grand com- diviseur entre le premier membre de l'équation et sa vée, le plus grand commun diviseur entre ce premier plus d commun diviseur et sa dérivée, et ainsi de suite jus- ce qu'on arrive à un polynôme premier avec sa dérivée; livise ensuite le polynôme proposé par le premier plus d commun diviseur, le premier par le second, et ainsi de ; on divise, enfin, chacun de ces quotients par le sui- t, et l'on égale à zéro ces nouveaux quotients. On ob- t de la sorte des équations donnant, la première les ra- s simples, la seconde les racines doubles, la troisième les ines triples, ..., de l'équation proposée.*

Exemple :

ioit l'équation du septième degré

$$X = x^7 - 2x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$$

cherchant le plus grand commun diviseur entre le po- ôme X et sa dérivée, on trouve

$$D = x^3 - x^2 - x + 1;$$

cherchant le plus grand commun diviseur entre le poly- ne D et sa dérivée, on trouve

$$D_1 = x - 1;$$

lernier polynôme est premier avec sa dérivée. Divisant polynômes l'un par l'autre, on a les quotients

$$\frac{X}{D} = Q = x^4 + x^3 - x - 1,$$

$$\frac{D}{D_1} = Q_1 = x^2 - 1,$$

$$D_1 = x - 1.$$

De nouvelles divisions donnent

$$\frac{Q}{Q_1} = x^2 + x + 1,$$

$$\frac{Q_1}{D_1} = x + 1,$$

$$D_1 = x - 1;$$

et l'on arrive aux trois équations

$$x^2 + x + 1 = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x - 1 = 0.$$

La première donne deux racines simples imaginaires, la seconde une racine double -1, la troisième une racine triple $+1$.

RECHERCHE DES RACINES COMMENSURABLES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE A COEFFICIENTS COMMENSURABLES.

Recherche des racines entières.

157. Soit

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

l'équation proposée, dont nous supposons tous les coefficients commensurables et même entiers ; car, s'ils n'étaient pas entiers, on les rendrait tels en multipliant tous les termes de l'équation par un nombre convenable. Nous avons expliqué (n° **134**) comment on effectue la division par $x - a$ du polynôme $f(x)$ ordonné par rapport aux puissances décrois-

santes de x; le premier coefficient du quotient est égal au premier coefficient du dividende, et chacun des autres coefficients se forme en multipliant le coefficient précédent par a et ajoutant le coefficient correspondant du dividende. Si tous les coefficients du dividende sont entiers, si, de plus, a est un nombre entier, positif ou négatif, il est clair que le quotient ainsi formé aura aussi tous ses coefficients entiers, puisqu'on les obtient en combinant des nombres entiers par multiplication et par addition.

Imaginons maintenant qu'ayant ordonné le polynôme par rapport aux puissances croissantes de x,

$$f(x) = A_m + A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 + \dots\dots + A_1 x^{m-1} + A_0 x^m,$$

on le divise par $a - x$; le diviseur étant seulement changé de signe, le quotient changera simplement de signe, et par conséquent aura toujours ses coefficients entiers. Effectuons cette division

$$\begin{array}{r|l}
\vdash A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 + A_{m-3}x^3 \dots + A_0 x^m & a - x \\ \cline{2-2}
-A_{m-1})x + A_{m-2}x^2 + A_{m-3}x^3 \dots + A_0 x^m & C_{m-1} + C_{m-2}x + C_{m-3}x^2 \dots + C_1 x^{m-2} + C_0 x^{m-1} \\
(C_{m-2} + A_{m-2})x^2 + A_{m-3}x^3 \dots + A_0 x^m & \\
(C_{m-3} + A_{m-2})x^3 \dots + A_0 x^m & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
(C_1 + A_1)x^{m-1} + A_0 x^m & \\
(C_0 + A_0)x^m \qquad\qquad &
\end{array}$$

Le premier coefficient est $\frac{A_m}{a}$; ce nombre doit être entier; ainsi, une première condition à laquelle doit satisfaire une racine entière, c'est de diviser exactement le dernier terme A_m de l'équation. Pour abréger, représentons par C_{m-1} le premier terme du quotient; multiplions-le par le diviseur $a - x$ et retranchons du dividende; le produit par a détruira le premier terme A_m du dividende, le produit par

$-x$ s'ajoutera au second terme; de sorte que le second dividende aura pour premier terme $(C_{m-1}+A_{m-1})\,x$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par a, on aura le second terme $\frac{C_{m-1}+A_{m-1}}{a}x$ du quotient : ce second coefficient doit être entier; appelons-le C_{m-2}. Multiplions le second terme $C_{m-2}x$ du quotient par $a-x$ et retranchons du dividende; le produit par a détruit le premier terme du second dividende, le produit par $-x$ s'ajoute au second terme; de sorte que le troisième dividende aura pour premier terme $(C_{m-2}+A_{m-2})x^2$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par a, on aura le troisième terme $\frac{C_{m-2}+A_{m-2}}{a}x^2$ du quotient; ce troisième coefficient, que nous représenterons par C_{m-3}, doit être entier, etc.

La loi est générale : on obtient un coefficient quelconque du quotient en ajoutant au précédent le coefficient du terme qui occupe dans le dividende le même rang que le terme que l'on veut former, et divisant la somme par a.

On arrivera ainsi au dernier dividende

$$(C_1+A_1)x^{m-1}+A_0x^m,$$

qui donnera le dernier terme $\frac{C_1+A_1}{a}x^{m-1}$ du quotient; le dernier coefficient $\frac{C_1+A_1}{a}$, que nous représenterons par C_0, doit aussi être entier. En multipliant le diviseur par le dernier terme C_0x^{m-1} du quotient et retranchant du dividende, on obtient le reste de la division $(C_0+A_0)x^m$. Si a est racine de l'équation, le reste est nul, et l'on a $C_0+A_0=0$.

158. Il résulte de ce qui précède que si l'on veut trou-

ver les racines entières d'une équation à coefficients entiers ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, on n'essayera que les diviseurs du dernier terme, et l'on procédera de la manière suivante :

Règle. *Pour voir si un nombre entier* a *est racine de l'équation, on divisera le dernier terme par ce nombre ; on ajoutera au quotient le coefficient de l'avant-dernier terme, et l'on divisera la somme par* a ; *on ajoutera au quotient le coefficient du terme précédent, et l'on divisera la somme par* a, *et ainsi de suite. Toutes ces divisions doivent se faire exactement, et quand on aura ajouté le coefficient du premier terme de l'équation, on devra trouver un résultat égal à zéro.*

Lorsqu'un nombre entier a satisfait à toutes ces conditions, il est évidemment racine de l'équation ; c'est ce qu'indique spécialement la dernière condition, qui exprime que le reste de la division du premier membre de l'équation par $a - x$ ou par $x - a$ est nul. On abaissera alors le degré de l'équation proposée en divisant son premier membre par $x - a$; mais il est à remarquer que le quotient est tout calculé ; les coefficients de ce quotient sont précisément les quotients entiers obtenus dans les opérations précédentes changés de signes. On continuera les essais, non plus sur l'équation proposée, mais sur l'équation simplifiée.

Exemples.

1° Trouver les racines entières de l'équation

$$x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 6 = 0.$$

On commencera par essayer 1 ; pour que 1 soit racine, il faut que la somme des coefficients positifs égale celle des

coefficients négatifs : c'est ce qui a lieu : donc 1 est racine. On divisera le premier membre de l'équation par $x - 1$, d'après la règle du n° 135, et l'on aura à considérer l'équation

$$x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6 = 0.$$

Cette équation n'admet plus la racine 1 ; on essayera -1 : si l'on remplace x par -1, on a un résultat nul

$$-1 + 6 - 6 + 7 - 6 = 0;$$

donc -1 est racine. On divisera l'équation par $x + 1$, d'après la même règle, et l'on aura l'équation

$$x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0.$$

Après s'être assuré que cette équation n'admet pour racine ni $+1$ ni -1, on essayera les diviseurs du dernier terme 6, pris avec le signe + ou le signe —. Essayons d'abord le diviseur le plus simple $+2$, et pour cela procédons d'après la règle formulée plus haut ; parcourant le polynôme de droite à gauche, nous dirons : le dernier terme -6 divisé par 2 donne -3 ; ajoutant le coefficient suivant -1, on a -4 qui, divisé par 2, donne -2 : ajoutant le coefficient suivant -5, on a -7, qui n'est pas divisible par 2 : ainsi 2 n'est pas racine.

Essayons maintenant -2, et écrivons les quotients successifs de droite à gauche,

$$-1, \quad +3, \quad -1, \quad +3.$$

Le dernier terme -6 divisé par -2 donne $+3$; ajoutant -1, on a $+2$ qui, divisé par -2, donne -1 ; ajoutant -5, on a -6 qui, divisé par -2, donne $+3$; ajoutant -1, on a $+2$ qui, divisé par -2, donne -1 ; ajoutant

premier coefficient $+1$, on obtient pour résultat zéro. si -2 est racine. Les nombres écrits plus haut, chan- de signes, sont les coefficients du quotient de la division premier membre de l'équation par $x+2$; on écrira ıc immédiatement l'équation

$$x^3-3x^2+x-3=0.$$

Le nombre -2 ne peut être une seconde fois racine, isqu'il ne divise plus le dernier terme. Les seuls nombres ssayer sont maintenant les diviseurs de 3, savoir $+3$ et 3. Si l'on essaye $+3$, on a les quotients

$$-1,\quad 0,\quad -1;$$

ıc $+3$ est racine, et, en divisant par $x-3$, on arrive 'équation du second degré

$$x^2+1=0,$$

i a deux racines imaginaires $+i$ et $-i$.

L'équation proposée est complétement résolue : ses sept cines sont $+1, -1, -2, +3, +i, -i$.

2° Déterminer les racines entières de l'équation

$$2x^3-12x^2+13x-15=0.$$

ırès avoir reconnu que $+1$ et -1 ne sont pas racines, essayera les diviseurs de 15. Voici le tableau des opéra- ns :

$$\begin{array}{rrrr|r}
2x^3 & -12x^2 & +13x & -15=0 & \\
 & & & -5 & +3 \\
 & +6 & -6 & +5 & -3 \\
 & -2 & +2 & -3 & +5
\end{array}$$

Les nombres $+3$ et -3 ne sont pas racines, mais $+5$

l'est. Divisant par $x-5$, on aura à résoudre l'équation du second degré

$$2x^2-2x+3=0.$$

3° Trouver les racines entières de l'équation

$$x^5-4x^4-101x^3+14x^2+504x+576=0.$$

Après avoir reconnu que $+1$ et -1 ne sont pas racines, on essayera les diviseurs de 576, en commençant par les plus faibles.

x^5	$-4x^4$	$-101x^3$	$+14x^2$	$+504x$	$+576=0$	
	$+24$	$+52$	$+205$	$+396$	$+288$	$+2$
		$+27$	$+37$	-108	-288	-2
			$+82$	$+232$	$+192$	$+3$
			$+30$	-104	-192	-3
			$+44$	$+162$	$+144$	$+4$
			$+19$	-90	-144	-4
			$+19$	$+100$	$+96$	$+6$
			$+9$	-68	-96	-6
				$+72$	$+72$	$+8$
	-1	$+12$	$+5$	-54	-72	-8
	x^4	$-12x^3$	$-5x^2$	$+54x$	$+72=0$	
					-9	-8
					$+8$	$+9$
					-8	-9
		-1	0	$+5$	$+6$	$+12$
		x^2	$-5x$	$-6=0.$		

Cette dernière équation n'a plus de racines entières. Ainsi l'équation proposée admet deux racines entières -8 et $+12$.

150. Remarque. Souvent on diminue beaucoup le nombre

des essais en cherchant des limites qui comprennent toutes les racines de l'équation proposée. On appelle *limite supérieure* des racines positives d'une équation, un nombre plus grand que la plus grande racine positive. Considérons d'abord une équation qui ne présente qu'une seule variation

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 5x - 60 = 0.$$

Cette équation, n'ayant qu'une variation, n'admet qu'une seule racine positive a. Imaginons que l'on fasse croître x de zéro à $+\infty$; tant que x reste inférieur à la racine a, le polynôme conserve une valeur négative. Dès que x dépasse a, le polynôme devient positif; l'équation n'ayant pas d'autre racine positive, le polynôme ne change plus de signe et par conséquent reste constamment positif au delà de a. On en conclut que toute quantité qui rend le polynôme positif est plus grande que a, ce qui donne une limite supérieure de la racine positive. Dans l'exemple actuel, 4 est une limite supérieure.

Soit maintenant une équation quelconque

$$x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 58x^2 - 144 = 0.$$

Partageons-la en groupes ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, et ne renfermant chacun qu'une variation,

$$x^3(x^2 - 6x - 5) + (58x^2 - 144) = 0.$$

En substituant des nombres entiers consécutifs, on voit que $x = 7$ rend positif le premier groupe ainsi que le second; pour toutes les valeurs de x supérieures à 7 les deux groupes ayant des valeurs positives, le polynôme a

aussi une valeur positive ; donc 7 est une limite supérieure des racines positives de l'équation.

On obtient de la même manière une limite supérieure des racines négatives. Si l'on change le signe de x, l'équation devient

$$x^5 + 6x^4 - 5x^3 - 58x^2 + 144 = 0;$$

on l'écrira

$$x^2(x^3 + 6x^2 - 5x - 58) + 144 = 0.$$

Le nombre 3, rendant positif le premier groupe, est une limite supérieure des racines positives de cette équation. Ainsi toutes les racines réelles de l'équation proposée sont comprises entre -3 et $+7$.

D'après cela, si l'on veut chercher les racines entières de l'équation

$$x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 58x^2 - 144 = 0,$$

il suffira d'essayer les diviseurs de 144 qui sont compris entre -3 et $+7$. On trouve d'abord les racines -2 et $+3$, ce qui réduit l'équation à

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 24 = 0.$$

Les nombres $+4$ et $+6$ ne sont pas racines ; il est inutile de pousser les essais au delà ; il est certain que cette dernière équation n'a plus de racine entière.

Recherches des racines commensurables fractionnaires.

160. Nous supposons toujours que l'équation

$$(1) \qquad A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots\ldots + A^{m-1}x + A_m = 0$$

a ses coefficients entiers. Une racine commensurable quel-

que pourra être mise sous la forme d'une fraction irré-
tible $\frac{a}{b}$, et l'on aura

$$A_0 \frac{a^m}{b^m} + A_1 \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + \ldots + A_{m-1} \frac{a}{b} + A_m = 0.$$

'on multiplie par b^{m-1}, cette relation devient

$$\frac{A_0 a^m}{b} = -(A_1 a^{m-1} + A_2 b a^{m-2} + \ldots + A_m b^{m-1});$$

econd membre étant entier, le premier doit l'être aussi;
is b est le premier avec a et par suite avec a^m; donc b di-
A_0. Ainsi *toute racine commensurable a pour dénomina-
un diviseur du premier coefficient de l'équation.*
n multipliant par b^m et divisant par a, on a de même

$$\frac{A_m b^m}{a} = -(A_0 a^{m-1} + A_1 b a^{m-2} + \ldots + A_{m-1} b^{m-1});$$

econd membre étant entier, le premier l'est aussi; or a
premier avec b^m; donc a divise A_m. Ainsi *le numérateur
un diviseur du dernier coefficient de l'équation.*
résulte de là qu'*une équation à coefficients entiers, dont
remier coefficient est l'unité, n'a pas de racine commen-
ble fractionnaire.* En effet, le dénominateur d'une racine
mensurable, devant diviser le premier coefficient qui
l'unité, est lui-même égal à un, et par conséquent la
ne est entière. Ainsi, dans ce cas, toutes les racines
mensurables sont entières.
eci nous donne un moyen facile de ramener la recherche
racines commensurables fractionnaires à celle des ra-
s entières.
n conçoit, en effet, que si l'on multiplie par un nombre en-

tier convenable les racines de l'équation proposée, on rendra entières toutes les racines commensurables fractionnaires. Posons donc $x' = kx$, d'où $x = \frac{x'}{k}$, et dans l'équation proposée remplaçons x par $\frac{x'}{k}$, nous obtiendrons la nouvelle équation

$$\frac{A_0 x'^m}{k^m} + \frac{A_1 x'^{m-1}}{k^{m-1}} + \frac{A_2 x'^{m-2}}{k^{m-2}} + \ldots\ldots + A_m = 0.$$

Déterminons maintenant le nombre entier k de manière qu'en chassant les dénominateurs pour rendre les coefficients entiers, on réduise en même temps le premier coefficient à l'unité. Cette opération réussira toujours quand on prendra $k = A_0$; en effet, si l'on multiplie par k^{m-1}, on met l'équation sous la forme

$$\frac{A_0}{k} x'^m + A_1 x'^{m-1} + A_2 k x'^{m-2} + \ldots\ldots + A_m k^{m-1} = 0;$$

si $k = A_0$, cette équation devient, l'accent étant supprimé,

$$(2) \quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 A_0 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m A_0^{m-1} = 0.$$

Cette dernière équation ayant ses coefficients entiers et son premier coefficient égal à l'unité, toutes ses racines commensurables sont entières. Nous avons posé $x = \frac{x'}{k}$, c'est-à-dire que les racines de l'équation (1) sont égales à celles de l'équation (2) divisées par k; ainsi, quand on aura trouvé les racines entières de l'équation transformée (2), en les divisant par k, on obtiendra toutes les racines commensurables de l'équation proposée.

On comprend pourquoi l'opération réussit toujours quand on prend $k = A_0$; les racines commensurables ayant pour

énominateur des diviseurs de A_0, il est clair que ces racines, multipliées par A_0, deviennent toutes entières.

Lorsqu'il s'agit de trouver les racines commensurables d'une équation, on commence par chercher les racines entières, et, s'il y en a, on divise l'équation par les facteurs binômes correspondants. On détermine ensuite les racines fractionnaires à l'aide des racines entières de l'équation (2); mais, dans la recherche des racines entières de cette dernière équation, il est inutile de pousser les essais jusqu'au dernier terme; car la plus grande racine de l'équation proposée étant au plus égale à A_m divisé par le plus petit diviseur de A_0, la plus grande racine entière de l'équation (2) sera au plus égale à k fois celle-ci; on s'arrêtera à cette limite.

Exemples.

1° Trouver les racines commensurables de l'équation

$$2x^4+x^3-10x^2-2x+12=0.$$

On trouve d'abord la racine entière -2; divisant par $x+2$, l'équation se réduit à

$$2x^3-3x^2-4x+6=0.$$

Cette équation n'ayant plus de racine entière, on la transforme en remplaçant x par $\frac{x}{2}$, ce qui donne

$$x^3-3x^2-8x+24=0.$$

Les racines fractionnaires de la seconde équation ne pouvant être que $\pm\frac{1}{2}$ et $\pm\frac{3}{2}$, on cherchera les racines entières de la troisième équation seulement parmi les nombres ± 1

et ± 5 ; on trouve que $+3$ est racine; ainsi l'équation proposée admet la racine fractionnaire $\frac{3}{2}$. La dernière équation divisée par $x-3$ conduit à l'équation du second degré

$$x^2-8=0$$

qui a deux racines incommensurables $\pm 2\sqrt{2}$, d'où résultent pour l'équation proposée les racines incommensurables $\pm\sqrt{2}$. Ainsi les quatre racines de l'équation proposée sont $-2, \frac{3}{2}, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

2° L'équation

$$4x^4-28x^3+45x^2-6x-18=0$$

n'a pas de racine entière. Si l'on remplace x par $\frac{x}{k}$, et si l'on multiplie par k^2, elle devient

$$\frac{4x^4}{k^2}-\frac{28x^3}{k}+45x^2-6kx-18k^2=0\,;$$

pour opérer la transformation, il suffit de prendre $k=2$, ce qui donne

$$x^4-14x^3+45x^2-12x-72=0.$$

Les racines fractionnaires de l'équation proposée, devenant entières quand on les multiplie par 2, ne peuvent être que $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{9}{2}$; on essayera donc ± 1, ± 3, ± 9.

L'équation transformée admet la racine -1; la division par $x+1$ donne l'équation

$$x^3-15x^2+60x-72=0.$$

Cette dernière admet la racine 3; la division par $x-3$

duit à l'équation du second degré

$$x^2 - 12x + 24 = 0,$$

it les racines $x = 6 \pm \sqrt{12}$ sont incommensurables. si les quatre racines de l'équation proposée sont $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3 \pm \sqrt{3}$.

161. Deuxième méthode. Il est à remarquer que lors- une équation

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

ses coefficients entiers et que l'on divise le premier mbre par le facteur binôme $x - \frac{a}{b}$, qui correspond à une :ine commensurable fractionnaire $\frac{a}{b}$, le quotient a aussi coefficients entiers. Supposons que l'on effectue la divi- n en ordonnant, par rapport aux puissances décrois- ıtes de x, comme nous l'avons expliqué au n° 134.

Le premier coefficient du quotient est A_0 ; le second s'ob- it en multipliant le premier par $\frac{a}{b}$ et ajoutant A_1; le isième en multipliant le second par $\frac{a}{b}$ et ajoutant A_2, et si de suite. Si les coefficients du quotient ne sont pas iers, ils ne pourront contenir à leurs dénominateurs que facteurs premiers de b.

Supposons maintenant que l'on divise le polynôme par $-x$, en ordonnant par rapport aux puissances croissantes x. On obtient le premier coefficient du quotient en divi- it A_m par $\frac{a}{b}$, ce qui revient à multiplier par $\frac{b}{a}$. Si à ce

premier coefficient on ajoute A_{m-1} et si l'on multiplie par $\frac{b}{a}$, on a le second coefficient du quotient, et ainsi de suite. On en conclut que, si les coefficients du quotient ne sont pas entiers, ils ne pourront contenir à leurs dénominateurs que les facteurs premiers de a. Mais nous avons déjà vu que ces mêmes dénominateurs ne peuvent contenir que les facteurs premiers de b; comme a et b sont premiers entre eux, tous ces dénominateurs se réduisent à l'unité, et par conséquent les coefficients du quotient sont entiers.

Non-seulement les coefficients du quotient sont entiers, mais encore ils sont tous divisibles par b. Car, si l'on désigne par A_0, B_1, B_2,..... les coefficients du quotient ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, on a

$$B_1 = \frac{A_0 a}{b} + A_1,$$

$$B_2 = \frac{B_1 a}{b} + A_2,$$

$$B_3 = \frac{B_2 a}{b} + A_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Pour que B_1 soit entier, il faut que b divise A_0, ce que l'on sait déjà. Pour que B_2 soit entier, il faut que b divise B_1, et ainsi de suite.

Les deux manières d'effectuer la division peuvent être appliquées pour l'essai direct des racines commensurables fractionnaires. On choisira l'une ou l'autre, suivant les cas.

Exemples.

1° Reprenons l'équation

$$4x^4 - 28x^3 + 45x^2 - 6x - 18 = 0,$$

nt il a déjà été question. Après avoir reconnu que cette uation n'a pas de racine entière, cherchons les racines actionnaires. Essayons d'abord $\frac{1}{2}$; si nous calculions le otient de droite à gauche, comme pour les racines entières, faudrait diviser successivement par $\frac{1}{2}$, ce qui revient à ultiplier par 2; toutes les opérations seraient possibles, il faudrait aller jusqu'au bout pour voir si le reste est nul. contraire, en calculant de gauche à droite, il faut mulplier successivement par $\frac{1}{2}$ ce qui revient à diviser par 2; us emploierons donc de préférence ce second procédé : multiplié par $\frac{1}{2}$ donne 2, et $-28\ldots\ldots-26$; -26 multiplié r $\frac{1}{2}$ donne -13 et $+45\ldots\ldots+32$; $+32$ multiplié par $\frac{1}{2}$ nne $+16$ et $-6\ldots\ldots+10$; $+10$ multiplié par $\frac{1}{2}$ donne 5 et $-18\ldots\ldots-13$. Il arrive ici que l'opération se prolonge jusquà la fin; mais le reste -13 n'est pas nul; donc $\frac{1}{2}$ 'est pas racine.

Essayant $-\frac{1}{2}$ de la même manière, toutes les opérations nt possibles, et l'on arrive à un reste nul; donc $-\frac{1}{2}$ est cine, et l'on a le quotient

$$4x^3-30x^2+60x-36=0,$$

, en divisant tous les termes par 2,

$$2x^3-15x^2+30x-18=0.$$

Après avoir essayé encore une fois $-\frac{1}{2}$, on essayera $\frac{3}{2}$,

mais en allant de droite à gauche : -18, divisé par $\frac{3}{2}$, donne -12 ; ajoutant $+30$ on a $+18$ qui, divisé par $\frac{3}{2}$, donne $+12$; ajoutant -15 on a -3 qui, divisé par $\frac{3}{2}$, donne -2 ; ajoutant le premier coefficient $+2$, on obtient un résultat égal à zéro. Donc $\frac{3}{2}$ est racine, et le quotient de la division par $x-\frac{3}{2}$ est

$$2x^2-12x+12=0,$$

ou

$$x^2-6x+6=0.$$

Cette équation du second degré donne deux racines incommensurables.

2° Trouver les racines commensurables de l'équation

$$15x^4+16x^3-46x^2-5x+6=0.$$

Après avoir reconnu que cette équation n'a pas de racine entière, on essayera la fraction $\frac{1}{3}$ en allant de gauche à droite, et l'on verra que cette fraction est racine. Dans l'équation simplifiée, on essayera les fractions $\pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}$, et l'on verra que $-\frac{2}{5}$ est racine. L'équation à laquelle on arrive, ayant son premier coefficient égal à l'unité, n'a plus de racine commensurable. Voici le tableau des calculs :

$15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0$	
$-1 \quad +3$	2
$+21 \quad +4 \quad -3$	-2
$-1 \quad +2$	3
-2	-3
$+1$	6
$+1 \quad -1$	-6
$15, \; +21, \; -39, \; -18, \; 0$	$\frac{1}{3}$
$5x^3 + 7x^2 - 13x - 6 = 0$	
$5, \; +8$	$\frac{1}{5}$
$5, \; +6$	$-\frac{1}{5}$
$5, \; +9$	$\frac{2}{5}$
$5, \; +5, \; -15, \; 0,$	$-\frac{2}{5}$
$x^2 + x - 3 = 0.$	

ondition de réalité des racines de l'équation du troisième degré.

162. LEMME. *Deux racines réelles consécutives de l'équa-n* $f(x) = 0$ *comprennent au moins une racine réelle de quation* $f'(x) = 0$.

En effet, soient a et b deux racines consécutives de l'é-ation $f'(x) = 0$; imaginons que l'on fasse varier x de a b ; pour $x = a$, la fonction $f(x)$ est nulle, elle s'annule de uveau pour $x = b$; dans l'intervalle, elle conserve des leurs finies et de même signe. La valeur absolue de la nction commence donc par croître pour décroître ensuite :

elle passe nécessairement par un maximum, et, par conséquent, la dérivée $f'(x)$ s'annule dans l'intervalle de a et b, Elle peut s'annuler plusieurs fois, parce que, dans l'intervalle de a à b, $f(x)$ peut éprouver plusieurs alternatives d'augmentation et de diminution.

La réciproque n'est pas vraie : deux racines consécutives de l'équation $f'(x) = 0$ ne comprennent pas toujours une racine de l'équation $f(x) = 0$.

163. Théorème. *Lorsque l'équation* $\mathrm{f}(x) = 0$ *a toutes ses racines réelles, l'équation* $\mathrm{f}'(x) = 0$ *a aussi toutes ses racines réelles, et deux racines consécutives de la seconde équation en comprennent une et une seule de la première.*

Soit m le degré de l'équation $f(x) = 0$, dont nous supposons les m racines réelles et rangées par ordre de grandeur croissante

$$a, b, c, \ldots\ldots h, k.$$

En vertu du lemme précédent, chacun des intervalles comprend une racine de la dérivée; il y a $m - 1$ intervalles; donc l'équation $f'(x) = 0$ a ses $m - 1$ racines réelles. Il est évident qu'il n'y a qu'une racine dans chacun des intervalles, sans quoi cette équation aurait plus de $m - 1$ racines. Appelons

$$a', b', c', \ldots\ldots h'$$

les $m - 1$ racines réelles de l'équation $f'(x) = 0$, rangées aussi par ordre de grandeur croissante; la première a' sera comprise entre a et b, la seconde b' entre b et c, etc. Réciproquement, deux racines consécutives de la seconde équation en comprennent une de la première et une seule; a' et b' comprennent la racine b, b' et c' la racine c, etc.; il y a donc $m - 2$ racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ dans les

$m-2$ intervalles, et de plus il y en a une a inférieure à a', et une autre k supérieure à h'.

164. Considérons, en particulier, l'équation du troisième degré.

$$f(x)=x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=0.$$

L'équation du second degré

$$f(x)=3x^2+2A_1x+A_2=0$$

doit avoir ses deux racines réelles, ce qui donne une première condition $A_1^2-3A_2>0$. Appelons a' et b' ces deux racines, a, b, c étant les trois racines de l'équation proposée. Supposons que x varie de $-\infty$ à $+\infty$; pour $x=-\infty$, le polynôme $f(x)$ a le signe $-$, qu'il conserve jusqu'à ce que x arrive à la plus petite racine a; quand x dépasse a, le polynôme change de signe, et prend le signe $+$ qu'il conserve jusqu'à la seconde racine b; là il change de signe une seconde fois et prend le signe $-$ qu'il conserve jusqu'à la plus grande racine c; il change alors de signe une troisième fois, et prend le signe $+$ qu'il garde indéfiniment. Ainsi, $f(x)$ a le signe $-$ de $-\infty$ à a, le signe $+$ de a à b, le signe $-$ de b à c, et le signe $+$ de c à $+\infty$.

Mais on a vu que la première racine a' de l'équation $f'(x)=0$ est comprise entre a et b; si donc on remplace x par a' dans le polynôme $f(x)$, on doit trouver un résultat positif. La seconde racine b', étant comprise entre b et c, donnera un résultat négatif.

Ces conditions sont suffisantes; car si l'on a $f(a')>0$ et $f(b)'<0$, le polynôme $f(x)$ change de signe, une première fois quand x croît de $-\infty$ à a', une seconde fois de a' à b' et une troisième fois de b' à $+\infty$; donc l'équation $f(x)=0$ a ses trois racines réelles.

Il suffit pour cela de remplacer x par $x - \frac{A_1}{3A_0}$, ce
disparaître le terme du second degré; on augmen
toutes les racines de la même quantité $\frac{A_1}{3A_0}$.

L'équation

$$3x^2 + p = 0$$

devant avoir ses deux racines réelles, il faut que le
cient p soit négatif; supposons cette condition re
nous aurons

$$a' = -\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad b' = \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

On doit avoir en outre $f(a') > 0$, c'est-à-dire

$$-\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q > 0,$$

ou

$$(1) \qquad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > -\frac{q}{2}.$$

La condition $f(b') < 0$ se déduira de la précédente en
geant le signe du radical et le sens de l'inégalité,

(2) $$-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > \frac{q}{2}.$$

: coefficient p étant négatif, les premiers membres de ces égalités sont des quantités positives. Supposons $q > 0$; négalité (1), ayant son second membre négatif, sera toujurs satisfaite; l'inégalité (2) ayant ses deux membres potifs, on peut les élever au carré, et l'on en déduit

$$-\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

ı

(3) $$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

upposons maintenant $q < 0$; c'est l'inégalité (2) qui est ɔujours vérifiée, et l'inégalité (1) conduit à la même inégalité (3). D'ailleurs, l'inégalité (3) ne peut être satisfaite ue si le coefficient p est négatif.

Ainsi, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation*

$$x^3 + px + q = 0$$

t ses trois racines réelles, est que ses coefficients satisfassent l'inégalité

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Quand le premier membre de cette inégalité est une ıantité positive, l'équation n'a qu'une racine réelle. ıand cette quantité est nulle, l'équation a deux racines ;ales, comme nous l'avons vu au n° 155.

Exemples.

1° L'équation

$$x^3 + 5x - 2 = 0,$$

dans laquelle le coefficient du second terme est positif, n'a qu'une racine réelle; cette racine est positive.

2° L'équation

$$x^3 - 6x + 4 = 0$$

a ses trois racines réelles. La transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation, une seule racine est négative, les deux autres sont positives.

3° L'équation

$$x^3 - 6x + 6 = 0$$

n'a qu'une racine réelle. Cette racine est négative.

Exercices.

1° Appliquer la méthode des racines égales aux équations

$$x^8-7x^7-2x^6+118x^5-259x^4-83x^3+612x^2-108x-432=0,$$
$$x^9+2x^8+x^7+6x^6+7x^5-2x^4+3x^3+2x^2-12x-8=0,$$
$$x^4-8x^3+24x^2-32x+16=0.$$

2° Chercher les racines commensurables des équations

$$x^5 + 5x^4 + x^3 - 16x^2 - 20x - 16 = 0,$$
$$2x^3 - 53x + 105 = 0,$$
$$6x^6 - 19x^5 + 13x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 16 = 0,$$
$$15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0.$$

CHAPITRE VII.

DES DIFFÉRENCES.

DIFFÉRENCES DES DIVERS ORDRES.

166. Étant données une suite de $m+1$ quantités

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots,\ u_m,$$

l'on retranche chacune d'elles de celle qui la suit, on a s *différences premières* de ces quantités. On est convenu de signer ces différences par la lettre Δ. Ainsi l'on représente r Δu_0 la différence u_1-u_0, par Δu_1 la différence u_2-u_1, etc. Les différences premières forment une suite de m quan-és

$$\Delta u_0,\ \Delta u_1,\ \Delta u_2,\ \ldots,\ \Delta u_{m-1};$$

'on retranche de même chacune d'elles de celle qui la t, on a les différences des différences premières, ou les *férences secondes* des quantités proposées. On les désigne r le symbole $\Delta\Delta$ ou plus simplement Δ^2. Ainsi l'on repré-nte par $\Delta^2 u_0$ la différence $\Delta u_1-\Delta u_0$, par $\Delta^2 u_1$ la diffé-nce $\Delta u_2-\Delta u_1$, etc.

Les différences secondes forment une suite de $m-1$ quantités

$$\Delta^2 u_0,\ \Delta^2 u_1,\ \Delta^2 u_2,\ \ldots.. \ \Delta^2 u_{m-2},$$

dont on peut prendre les différences premières, ce qui donnera les *différences troisièmes* des quantités proposées; on désignera ces différences troisièmes par le symbole $\Delta\Delta^2$ ou plus simplement Δ^3. En continuant de la même manière, on obtiendra les différences des divers ordres des quantités proposées.

167. Les $m+1$ quantités proposées ont m différences premières, et par suite $m-1$ différences secondes, $m-2$ différences troisièmes, et enfin une seule différence de l'ordre m. On ne peut pas aller au delà. Nous disposerons le tableau des différences de la manière suivante :

u_0	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	$\Delta^3 u_0$	$\Delta^4 u_0$	$\Delta^5 u_0$
u_1	Δu_1	$\Delta^2 u_1$	$\Delta^3 u_1$	$\Delta^4 u_1$	
u_2	Δu_2	$\Delta^2 u_2$	$\Delta^3 u_2$		
u_3	Δu_3	$\Delta^2 u_3$			
u_4	Δu_4				
u_5					

mettant dans une première colonne verticale les nombres proposés, dans la seconde colonne les différences premières, dans la troisième les différences secondes, et ainsi de suite. On remarque que l'indice de Δ reste le même dans une même colonne verticale, et l'indice de u dans une même ligne horizontale. Pour former ce tableau, *on retranche chaque nombre de celui qui est placé au-dessous de lui, et on écrit le résultat à droite du premier*. Ainsi on obtient Δu_0 en retranchant u_0 de u_1, Δu_1 en retranchant u_1 de u_2,.....;

le même $\Delta^2 u_0$ en retranchant Δu_0 de Δu_1, $\Delta^2 u_1$ en retran-
:hant Δu_1 de Δu_2, ... On a en général par définition

$$\Delta^{p+1} u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^p u_n\,;$$

i l'on retranche $\Delta^p u_n$ du nombre Δ^p_{n+1} placé au-dessous de
ii, on obtient le nombre $\Delta^{p+1} u_n$ placé à droite du premier.

Soient, par exemple, les six nombres 1, 10, 25, 44, 70,
8. En appliquant la règle précédente, on formera le
ibleau des différences jusqu'au cinquième ordre :

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
1	9	6	—2	5	—13
10	15	4	3	—8	
25	19	7	—5		
44	26	2			
70	28				
98					

In commence par écrire les six nombres proposés dans une
olonne verticale. Retranchant chacun d'eux du suivant,
n a les différences premières 9, 15, 19, 26, 28, que l'on
crit dans une seconde colonne; retranchant chacun des
ombres de cette seconde colonne du suivant, on a les dif-
érences secondes 6, 4, 7, 2, que l'on écrit dans une troi-
ième colonne, et ainsi de suite jusqu'à la différence cin-
uième à laquelle s'arrête le calcul.

168. Réciproquement si l'on donne le premier nombre u_0
t ses m différences successives Δu_0, $\Delta^2 u_0$, ..., $\Delta^m u_0$, on
eut reconstituer le tableau et reproduire les m autres nom-
res u_1, u_2, ..., u_m. En effet, puisque $\Delta u_0 = u_1 - u_0$, on a
$= u_0 + \Delta u_0$. De même, puisque $\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0$, on a

$\Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0$; connnaissant Δu_1, on obtient $u_2 = u_1 + \Delta u_1$. On trouve de la même manière $\Delta^2 u_1 = \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0$, $\Delta u_2 = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1$, $u_3 = u_2 + \Delta u_2$, et ainsi de suite. On remarque que *chaque nombre du tableau égale le nombre placé au-dessus de lui, plus celui qui est à droite de ce dernier;* car on a en général par définition

$$\Delta^{p+1} u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^p u_n,$$

d'où l'on déduit

$$\Delta^p u_{n+1} = \Delta^p u_n + \Delta^{p+1} u_n;$$

le nombre $\Delta^p u_{n+1}$ égale le nombre $\Delta^p u_n$ placé au-dessus de lui, plus le nombre $\Delta^{p+1} u_n$ placé à droite de ce dernier.

On procède par lignes obliques, comme l'indique le tableau précédent; nous avons déjà calculé les trois premières lignes obliques; on continuera de la même manière: $\Delta^4 u_0$ ajouté à $\Delta^3 u_0$ donne $\Delta^3 u_1$; celui-ci ajouté à $\Delta^2 u_1$, donne $\Delta^2 u_2$; celui-ci ajouté à Δu_2 donne Δu_3; enfin, ce dernier ajouté à u_3 donne u_4. Recommençant à partir de $\Delta^5 u_0$, on formera successivement les nombres $\Delta^4 u_1$, $\Delta^3 u_2$, $\Delta^2 u_3$, Δu_4, u_5 de la ligne oblique suivante, et ainsi de suite. En poussant l'opération de proche en proche jusqu'à $\Delta^m u_0$, on arrivera finalement à u_m.

Soient, par exemple, le nombre 1 et ses cinq différences successives 9, 6, — 2, 5, — 13. On appliquera la règle précédente et l'on dira : 9 et 1..... 10; 6 et 9..... 15 et 10....,25; — 2 et 6..... 4 et 15.....19 et 25.....44; 5 et — 2.....3 et 4.....7 et 19..... 26 et 44.....70; — 13 et 5..... — 8 et 3..... — 5 et 7..... 2 et 26..... 28 et 70.....98.

ÉTANT DONNÉS $m+1$ NOMBRES $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots. u_m$, TROUVER : 1° L'EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL u_n EN FONCTION DU PREMIER TERME u_0 ET DE SES DIFFÉRENCES SUCCESSIVES ; 2° L'EXPRESSION DE $\Delta^n u_0$ EN FONCTION DES NOMBRES PROPOSÉS.

169. Supposons d'abord que l'on donne le nombre u_0 et ses m différences successives Δu_0, $\Delta^2 u_0, \ldots\ldots, \Delta^m u_0$; il s'agit de trouver les nombres $u_1, u_2, \ldots\ldots u_m$. Nons savons que la question est possible, et nous avons indiqué dans le numéro précédent la manière d'effectuer le calcul de proche en proche; mais nous cherchons ici une formule algébrique donnant l'expression d'un terme quelconque u_n de la suite en fonction des quantités données.

Puisque $\Delta u_0 = u_1 - u_0$ par définition, on a d'abord

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0.$$

On a aussi $u_2 = u_1 + \Delta u_1$. Mais $\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0$ par définition, d'où $\Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0$; si dans l'expression de u_2 on remplace u_1 et Δu_1 par leurs valeurs, il vient

$$u_2 = (u_1 + \Delta u_0) + (\Delta u_0 + \Delta^2 u_0),$$

ou plus simplement

$$u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0.$$

On a de même

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2.$$

Nous connaissons u_2; on en déduit facilement Δu_2. Imaginons en effet que, dans le tableau des différences (n° **167**), on supprime la première colonnne verticale, les différences premières constitueront les nombres proposés, les différences secondes deviendront les différences premières,

et ainsi de suite. C'est comme si l'on augmentait d'une unité l'indice de la lettre Δ dans chaque terme. Or il est clair que le tableau ainsi modifié jouit des mêmes propriétés que le tableau primitif ; nous avons trouvé la relation

$$u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0;$$

nous aurons maintenant

$$\Delta u_2 = \Delta u_0 + 2\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0.$$

Si dans l'expression $u_3 = u_2 + \Delta u_2$ on remplace u_2 et Δu_2 par leurs valeurs, il vient

$$\begin{aligned} u_3 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 \\ + \Delta u_0 + 2\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 \end{aligned} = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0.$$

Le même raisonnement peut être répété indéfiniment. On a

$$u_4 = u_3 + \Delta u_3.$$

Nous connaissons u_3 ; on en déduit facilement Δu_3. Si l'on imagine comme précédemment la première colonne verticale supprimée, ce qui revient à augmenter d'une unité l'indice de la lettre Δ dans chaque terme, la relation

$$u_3 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0$$

deviendra

$$\Delta u_3 = \Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + 3\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0.$$

En remplaçant u_3 et Δu_3 par leurs valeurs, on a

$$\begin{aligned} u^4 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 \\ + \Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + 3\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0. \end{aligned} = u_0 + 4\Delta u_0 + 6\Delta^2 u_0 + 4\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0.$$

On reconnaît les coefficients du développement de la puissance d'un binôme ; l'expression de u_2 a pour coeffi-

ients ceux du carré d'un binôme ; l'expression de u_3 ceux
u cube ; l'expression de u_4 ceux de la quatrième puis-
ance. Nous allons faire voir que cette loi est générale. Pour
ela, nous démontrerons que si elle est vraie pour u_n, elle
est aussi pour u_{n+1}, c'est-à-dire que si l'expression de u_n
pour coefficients ceux de la n^e puissance du binôme,
expression de u_{n+1} aura pour expression ceux de la $n+1^e$
uissance. Soit donc

$$u_n = u_0 + C_n^1 \Delta u_0 \ldots\ldots + C_n^{p-1} \Delta^{p-1} u_0 + C_n^p \Delta^p u_0 \ldots\ldots + \Delta^n u_0.$$

Si l'on imagine la première colonne verticale supprimée, e qui revient, comme nous l'avons dit, à augmenter d'une nité l'indice de la lettre Δ dans chaque terme, cette relaion devient

$$\Delta u_n = \Delta u_0 + C_n^1 \Delta^2 u_0 \ldots\ldots + C_n^{p-1} \Delta^p u_0 \ldots\ldots + \Delta^{n+1} u_0.$$

uisque $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$, en ajoutant les deux égalités récédentes, on a

$$u_{n+1} = u_0 + \begin{array}{c|} C_n^1 \\ +1 \end{array} \; \Delta u_0 + \begin{array}{c|} C_n^2 \\ +C_n^1 \end{array} \; \Delta^2 u_0 \ldots\ldots + \begin{array}{c|} C_n^p \\ +C_n^{p-1} \end{array} \; \Delta^p u_0 \ldots + \Delta^{n+1} u_0.$$

lais $C_n^1 + 1 = C_{n+1}^1$, $C_n^2 + C_n^1 = C_{n+1}^2$, ...; en général, $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$; le second membre se réduit donc à

$$u_{n+1} = u_0 + C_{n+1}^1 \Delta u_0 + C_{n+1}^2 \Delta^2 u_0 \ldots + C_{n+1}^p \Delta^p u_0 \ldots + \Delta^{n+1} u_0.$$

voit que si la loi est vraie pour u_n, elle l'est aussi pour u_{n+1}. Comme elle est démontrée pour u_2, u_3, u_4, elle l'est our u_5, u_6, ... et par conséquent pour un terme quelonque.

Ainsi nous avons la formule générale

$$(\alpha)\qquad u_n = u_0 + \frac{n}{1}\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots\ldots + \Delta^n u_0.$$

Au moyen de cette formule, on obtient chacun des nombres u_0, u_1, u_2, ... u_m, en donnant à n l'une quelconque des valeurs 0, 1, 2 ,..... m. On peut écrire cette formule sous la forme symbolique

$$u_n = (1+\Delta)^n u_0,$$

en convenant de développer $(1+\Delta)^n$ suivant la loi du binôme, comme si la lettre Δ désignait une quantité, et de regarder les exposants comme des indices.

On donne, par exemple, le nombre u_0 et ses cinq différences successives :

$$u_0 = 1,\ \Delta u_0 = 9,\ \Delta^2 u_0 = 6,\ \Delta^3 u_0 = -2,\ \Delta^4 u_0 = 5,\ \Delta^5 u_0 = -15$$

si dans la formule (α) on fait $n = 4$, on a

$$u_4 = 1 + 4.9 + 6.6 - 4.2 + 5 = 70.$$

On obtient ainsi directement le nombre 70 que l'on a trouvé précédemment par un calcul de proche en proche.

170. Supposons maintenant que l'on donne les $m+1$ nombres

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ u_m,$$

et que l'on veuille trouver les m différences successives du premier de ces nombres, savoir :

$$\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots\ldots\ \Delta^m u_0.$$

On a d'abord

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0.$$

On a aussi par définition

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0.$$

uis $\Delta u_1 = u_2 - u_1$, si dans l'expression de $\Delta^2 u_0$ on rem-
ace Δu_0 et Δu_1 par leurs valeurs, il vient

$$\Delta^2 u_0 = (u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) = u_2 - 2u_1 + u_0.$$

On a de même

$$\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0.$$

ous connaissons $\Delta^2 u_0$; il est facile d'en déduire $\Delta^2 u_1$. Ima-
nons que dans le tableau des différences on supprime
première ligne horizontale, la seconde ligne deviendra
première, la troisième la seconde ; c'est comme si l'on
ettait u_1 à la place de u_0, u_2 à la place de u_1, etc. ; en un
ot, c'est comme si l'on augmentait d'une unité l'indice de
lettre u dans chaque terme. Il est clair que le tableau ainsi
odifié jouit des mêmes propriétés que le tableau primitif.
ous avons trouvé la relation

$$\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0 ;$$

us aurons maintenant

$$\Delta^2 u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1.$$

dans l'expression $\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0$ on remplace $\Delta^2 u_0$
$\Delta^2 u_1$ par leurs valeurs, il vient

$$\Delta^3 u_0 = \begin{array}{l} u_3 - 2u_2 + u_1 \\ \quad\; - u_2 + 2u_1 - u_0 \end{array} = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0 :$$

Le même raisonnement peut être répété indéfiniment.
a

$$\Delta^4 u_0 = \Delta^3 u_1 - \Delta^3 u_0.$$

ous connaissons $\Delta^3 u_0$. Si l'on imagine encore la première

$$\Delta^4 u_0 = u_4 - 3u_3 + 3u_2 - u_1 \qquad = u_4 - 4u_3 + 6u_2 -$$
$$- \ u_3 + 3u_2 - 3u_1 + u_0$$

On reconnaît encore les coefficients du dévelo de la puissance du binôme. L'expression de $\Delta^2 u$ coefficients ceux de $(a-b)^2$, l'expression de $\Delta^3 u_0$ $(a-b)^3$, l'expression de $\Delta^4 u_0$ ceux de $(a-b)^4$. Je montrer que la loi est générale : admettons-la pou soit

$$\Delta^n u_0 = u_n - C_n^1 u_{n-1} \ldots\ldots \mp C_n^{p-1} u_{n-p+1} \pm C_n^p u_{n-p} \ldots\ldots$$

Si l'on imagine la première ligne horizontale su ce qui revient, comme nous l'avons dit, à a d'une unité tous les indices de la lettre u, cette devient

$$\Delta^n u_1 = u_{n+1} - C_n^1 u_n \ldots\ldots \pm C_n^p u_{n-p+1} \ldots\ldots \pm u_1$$

Mais $\Delta^{n+1} u_0 = \Delta^n u_1 - \Delta^n u_0$; on obtient donc, en ret l'une de l'autre, les deux expressions précédentes,

$$\Delta^{n+1} u_0 = u_{n+1} - \left.\begin{matrix} C_n^1 \\ 1 \end{matrix}\right| u_n + \left.\begin{matrix} C_n^2 \\ + C_n^1 \end{matrix}\right| u_{n-1} \ldots\ldots \pm \left.\begin{matrix} C_n^p \\ \pm C_n^{p-1} \end{matrix}\right| u_{n+1-p} \cdots$$

On voit par là que si la loi est vraie pour $\Delta^n u_0$, elle l'est aussi pour $\Delta^{n+1} u_0$. Comme elle a été démontrée pour $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, $\Delta^4 u_0$, elle est vraie pour $\Delta^5 u_0$, $\Delta^6 u_0$, ... et par conséquent pour une différence d'ordre quelconque.

On a donc la formule générale

$$(\beta) \qquad \Delta^n u_0 = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} \ldots\ldots \pm u_0.$$

Au moyen de cette formule on obtiendra chacune des m différences successives de u_0, en donnant à n l'une quelconque des valeurs 1, 2,..... m. On peut écrire cette formule sous la forme symbolique $\Delta^n u_0 = (u-1)^n$, en remplaçant dans le développement les exposants par des indices et le dernier terme 1 ou u^0 par u_0.

On donne, par exemple, les six nombres 1, 10, 25, 44, 70 et 98. Si l'on fait $n = 4$ dans la formule (β), on aura directement la différence

$$\Delta^4 u_0 = 70 - 4.44 + 6.25 - 4.10 + 1 = 5,$$

obtenue précédemment par une valeur de proche en proche.

Différences d'une fonction.

171. Soit $u = f(x)$ une fonction quelconque de la variable x; si l'on donne à la variable $m+1$ valeurs

$$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_m,$$

la fonction prendra une suite de valeurs correspondantes

$$u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots u_m,$$

dont nous pourrons prendre les différences des divers ordres, comme nous l'avons expliqué précédemment. Ordinairement les valeurs données à la variable forment une

progression arithmétique dont on appelle h la raison. Supposons que x représente l'un quelconque des termes de la progression, $x+h$ étant le terme suivant ; les valeurs correspondantes $f(x)$ et $f(x+h)$ de la fonction auront pour différence première $f(x+h)-f(x)$; c'est une nouvelle fonction de x que l'on nomme *différence première* de la fonction proposée et que l'on désigne par $\Delta f(x)$, Si dans cette fonction $\Delta f(x)$ on remplace successivement x par chacun des termes de la progression, on obtiendra les m différences premières que fournissent les $m+1$ valeurs correspondantes de la fonction.

De même, si l'on donne à x deux valeurs consécutives x et $x+h$, les valeurs correspondantes de la fonction $\Delta f(x)$ auront une différence $\Delta f(x+h)-\Delta f(x)$; c'est une nouvelle fonction de x que l'on nomme *différence seconde* de la fonction proposée et que l'on désigne par $\Delta^2 f(x)$. Et ainsi de suite.

Prenons comme exemple la fonction

$$u=a^x;$$

nous aurons

$$\Delta u=a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1).$$

Ainsi on forme la différence première de la fonction a^x en multipliant cette fonction par la quantité constante a^h-1.

On aura de même

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u &= a^x(a^h-1)^2,\\
\Delta^3 u &= ax(a^h-1)^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta^n u &= a^x(a^h-1)^n.
\end{aligned}$$

Considérons encore la fonction

$$u=x(x+h)\,(x+2h)\,\ldots\ldots\,[x+(n-1)h].$$

Nous aurons

$$\Delta u = (x+h)(x+2h)\,.....\,(x+nh)$$
$$-x(x+h)\,.....\,[x+(n-1)h]$$
$$= nh(x+h)(x+2h)\,.....\,[x+(n-1)h].$$

La fonction proposée est du degré n; pour former la différence Δu, on a multiplié par le nombre des facteurs et par la raison h et l'on a supprimé le premier facteur.

En appliquant la même règle, on écrira de suite

$$\Delta^2 u = n(n-1)\,h^2(x+2h)(x+3h)\,.....\,[x+(n-1)h],$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^n u = n(n-1)(n-2)\,.....\,3.2.1\,h^n.$$

On trouve de la même manière

$$\Delta \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

$$\Delta \cos x = -2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

et par suite

$$\Delta^2 \sin x = -2^2 \sin^2 \frac{h}{2} \sin(x+h),$$

$$\Delta^2 \cos x = -2^2 \sin^2 \frac{h}{2} \cos(x+h);$$

$$\Delta^3 \sin x = -2^3 \sin^3 \frac{h}{2} \cos\left(x+3\,\frac{h}{2}\right),$$

$$\Delta^3 \cos x = 2^3 \sin^3 \frac{h}{2} \sin\left(x+3\,\frac{h}{2}\right);$$

$$\Delta^4 \sin x = 2^4 \sin^4 \frac{h}{2} \sin(x+2h),$$

$$\Delta^4 \cos x = 2^4 \sin^4 \frac{h}{2} \cos(x+2h).$$

LA DIFFÉRENCE m D'UNE FONCTION ENTIÈRE DU DEGRÉ m EST CONSTANTE, SI LA DIFFÉRENCE DE LA VARIABLE EST ELLE-MÊME CONSTANTE.

172. Considérons en particulier la fonction entière du degré m. On a, en développant d'après la loi connue,

$$\Delta u = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

La quantité h, raison de la progression arithmétique, est une constante; on voit par là que la différence première d'une fonction entière du degré m par rapport à la variable x est une fonction entière du degré $m-1$. De même la différence de la fonction Δu, ou la différence seconde de la fonction proposée, sera du degré $m-2$; $\Delta^2 u$ sera du degré $m-3$; en général $\Delta^n u$ sera du degré $m-n$. Enfin la différence d'ordre m sera du degré zéro; ce sera donc une constante, et par conséquent les différences d'un ordre plus élevé seront nulles.

173. REMARQUE. Soit

$$u = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots A_{m-1}x + A_m$$

la fonction entière proposée, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x. Cette fonction étant la somme des termes qui la composent, sa différence d'un ordre quelconque est égale à la somme des différences du même ordre de ses différents termes. Il en résulte que la différence première ne dépendra pas du terme constant A_m, puisque la différence de ce terme est nulle; la différence seconde ne dépendra pas des deux derniers termes $A_{m-1}x + A_m$, puisque la différence seconde de cette partie est nulle; en général,

la différence d'ordre n ne dépendra que des termes dont le degré est égal ou supérieur à n; enfin la différence d'ordre m ne dépend que du premier terme A_0x^m. Nous nous proposons de calculer cette différence d'ordre m.

Nous avons

$$\Delta u = hf'(x) + \ldots\ldots;$$

le premier terme s'obtient en prenant la dérivée du polynôme proposé et multipliant par h; les autres termes étant d'un degré inférieur à $m - 1$ ne donneront rien dans $\Delta^m u$. Nous aurons, en appliquant la même règle,

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u &= h^2 f''(x) + \ldots\ldots\\
\Delta^3 u &= h^3 f'''(x) + \ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta^n u &= h^n f^n(x) + \ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta^m u &= h^m f^m(x).
\end{aligned}$$

Le premier terme du polynôme $f(x)$ entrant seul dans la m^e dérivée, on aura finalement

$$\Delta^m u = 1.2.3\ldots\ldots mA_0h^m.$$

Exemples.

1° Former les carrés des nombres entiers. Considérons la fonction $u = x^2$, et supposons que l'on donne à x les valeurs 0, 1, 2, 3,....., en progression arithmétique. La fonction étant du second degré, la différence seconde $\Delta^2 u$ est constante et égale à $1.2.h^2$, c'est-à-dire à 2, puisque la raison h est l'unité; les différences d'un ordre plus élevé sont nulles. Pour commencer le tableau, il suffit d'écrire les deux premiers carrés 0 et 1 avec leur différence première 1 et la différence seconde 2 trouvée directement.

	Δ	Δ^2
0	1	2
1	3	2
4	5	2
9	7	2
16	9	
25		

On répétera la différence seconde constante 2 dans la troisième colonne autant que l'on voudra, et l'on dira, en calculant par lignes obliques, d'après la règle établie au n° 167 : 2 et 1...3 et 1...4; 2 et 3...5 et 4...9; 2 et 5...7 et 9...16; en continuant de cette manière on formera les carrés des nombres entiers consécutifs.

2° Former les cubes des nombres entiers. Considérons la fonction $u=x^3$ et donnons encore à x les valeurs successives 0, 1, 2, 3... en progression arithmétique. La fonction étant du troisième degré, la différence troisième sera constante et égale à $1.2.3h^3$ ou 6. Pour commencer le tableau nous écrirons les trois premiers cubes 0, 1, 8, d'où nous déduirons les différences premières 1 et 7, et la différence seconde 6; mettant ensuite à la droite la différence troisième constante 6 trouvée directement, on pourra effectuer le calcul des lignes obliques et obtenir les cubes des nombres entiers consécutifs.

	Δ	Δ^2	Δ^3
0	1	6	6
1	7	12	6
8	19	18	6
27	37	24	
64	61		
125			

° Trouver la somme des carrés des n premiers nombres.
sidérons la suite des quantités

$$o^2,\ u_1=o^2+1^2,\ u_2=o^2+1^2+2^2,\ u_3=o^2+1^2+2^2+3^2,\ \ldots\ldots;$$

lifférences premières sont les carrés consécutifs 1^2, 2^2, ...; il résulte de ce qui a été dit précédemment que lifférences secondes des différences premières, ou les rences troisièmes des nombres proposés, sont constes et égales à 2; et par suite que les différences d'un e plus élevé sont nulles. Écrivons le commencement du eau avec les trois premiers nombres u_0, u_1, u_2;

$u_0=o^2$	$\Delta u_0=1$	$\Delta^2 u_0=3$	$\Delta^3 u_0=2.$
$u_1=o^2+1^2$	$\Delta u_1=4$		
$u_2=o^2+1^2+2^2$			

ervons-nous maintenant de la formule (α) démontrée n° 169, formule qui exprime un terme quelconque u_n a suite des nombres proposés au moyen du premier tre eux et de ses différences successives; ici les différes d'un ordre supérieur au troisième sont nulles; le déppement se réduira donc à ses quatre premiers termes on aura

$$_n=u_0+n\Delta u_0+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0,$$

en remplaçant les différences par leurs valeurs,

$$=n+\frac{3n(n-1)}{1.2}+\frac{2n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

° Trouver la somme des cubes des n premiers nombres.
sidérons la suite des quantités $u_0=o^3$, $u_1=o^3+1^3$,

$u_2 = 0^3 + 1^3 + 2^3$, $u_3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3, \ldots$; les différences premières sont les cubes consécutifs $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$; les différences troisièmes de ces différences premières, ou les différences quatrièmes des quantités proposées, sont constantes et égales à 6; les différences d'un ordre plus élevé sont nulles. On écrira le commencement du tableau avec les quatre premiers nombres

$u_0 = 0^3$	$\Delta u_0 = 1$	$\Delta^2 u_0 = 7$	$\Delta^3 u_0 = 12$	$\Delta^4 u_0 = 6.$
$u_1 = 0^3 + 1^3$	$\Delta u_1 = 8$	$\Delta^2 u_1 = 19$		
$u_2 = 0^3 + 1^3 + 2^3$	$\Delta u_2 = 27$			
$u_3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3$				

Les différences d'un ordre supérieur au quatrième étant nulles, la formule (α) se réduit à ses cinq premiers termes et l'on a

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_0,$$

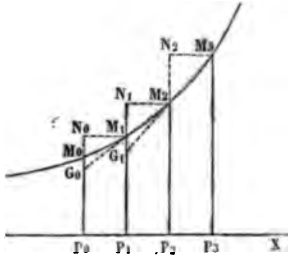
et, en remplaçant les différences par leurs valeurs,

$$n_n = n + \frac{7n(n-1)}{2} + 2n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

On retrouve ainsi les formules déjà obtenues par d'autres moyens (nos 56 et 62). Cette méthode permet de trouver avec la même facilité la somme des puissances quatrièmes, ou des puissances cinquièmes, ..., des nombres entiers consécutifs.

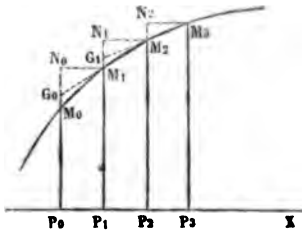
174. REMARQUE. Supposons que l'on porte sur la ligne

le OX, à partir du point fixe O, des longueurs OP_0, ,....., égales aux valeurs x_0, x_1, x_2,,....., que l'on donne à la variable x et que l'on élève des perpendiculaires ou ordonnées P_0M_0, P_1M_1, P_2M_2,... égales aux valeurs correspondantes u_0, u_1, u_2,... de la fonction.



s points M_1, M_2,..,.. on mène des horizontales M_1N_0, jusqu'à la rencontre des ordonnées précédentes, que les différences premières Δu_0, Δu_1,..... seront tées par les longueurs M_0N_0, M_1N_1,..... affectées + ou du signe —, suivant que les ordonnées vont ıentant ou en diminuant.

e cas où les valeurs de x sont en progression arithmétique, par les deux points M_2, M_1, faisons passer une droite jusqu'à la rencontre de la première ordonnée en G_0; par les deux points M_3, M_2, une droite jusqu'à la ren-



e la seconde ordonnée en G_1, et ainsi de suite; les rs M_0G_0, M_1G_1,..... prises avec le signe + ou le , représenteront les différences secondes Δ^2u_0, Δ^2u_1,... ,· les triangles $M_1N_0G_0$, $M_2N_1M_1$ sont égaux, et $N_0G_0 = M_1N_1 = \Delta u_1$; donc $M_0G_0 = N_0G_0 - M_0N_0 =$ $\iota_0 = \Delta^2u_0$, etc. Lorsque la différence seconde est , le point G_0 est au-dessous de M_0 et la courbe

tourne sa concavité vers le haut ; c'est ce qui a lieu dans la première figure. Lorsque la différence seconde est négative, le point G_0 est au-dessus de M_0, et la courbe tourne sa concavité vers le bas ; c'est le cas de la seconde figure.

CONNAISSANT LES RÉSULTATS DE LA SUBSTITUTION DE m NOMBRES ENTIERS CONSÉCUTIFS DANS UNE FONCTION ENTIÈRE DU DEGRÉ m, ON OBTIENT FACILEMENT, AU MOYEN DES DIFFÉRENCES, LES RÉSULTATS DE LA SUBSTITUTION DE TOUS LES AUTRES NOMBRES ENTIERS POSITIFS OU NÉGATIFS. — APPLICATION AU CAS D'UNE FONCTION ENTIÈRE DU TROISIÈME DEGRÉ, DONT ON CONNAÎT LES VALEURS CORRESPONDANTES AUX VALEURS — 1, 0, + 1 DE LA VARIABLE.

175. Considérons d'abord un polynôme du troisième degré

$$u = x^3 + 3x^2 - 17x + 5.$$

Nous nous proposons de calculer les valeurs que prend ce polynôme pour les valeurs entières

$$\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 2, 3, \ldots\ldots$$

positives ou négatives, données à la variable x. En substituant directement les trois nombres simples $-1, 0, +1$, on obtient les trois résultats 24, 5 et -8. Avec ces trois valeurs, on forme deux différences premières -19 et -13, et une différence seconde 6. La fonction étant entière et du troisième degré, on sait que la différence troisième est constante et égale à $1.2.3.A_0h^3$, c'est-à-dire à 6 dans l'exemple actuel ; les différences d'ordre supérieur sont nulles. On peut donc prolonger le tableau indéfiniment par lignes obliques d'après la règle du n° 167, et obtenir les

valeurs du polynôme pour $x = 2$, $x = 3$, etc. Voici la disposition du tableau :

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3
-1	24	-19	6	6
0	5	-13	12	6
$+1$	-8	-1	18	6
2	-9	17	24	6
3	8	41	30	
4	49	71		
5	120			

La première colonne verticale contient les valeurs de la variable x, la seconde les valeurs correspondantes de la fonction, et les suivantes les différences, comme à l'ordinaire. La dernière colonne contient la différence troisième constante 6 que l'on répète indéfiniment. On calcule en disant : 6 et 6..... 12 et -13..... -1 et -8..... -9, valeur de la fonction pour $x = 2$. Recommençant alors une nouvelle ligne oblique, on dit : 6 et 12..... 18 et -1..... 17 et -9..... 8, valeur du polynôme pour $x = 3$, etc.

On peut aussi prolonger le tableau vers le haut et trouver les valeurs de la fonction pour $x = -2$, $x = -3$, etc. On remarque, en effet, que *tout nombre du tableau est égal au nombre placé au-dessous de lui, moins celui qui est à droite du premier ;* car, de la relation générale

$$\Delta^{p+1} u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^p u_n,$$

on déduit

$$\Delta^p u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^{p+1} u_n;$$

le nombre $\Delta^p u_n$ égale le nombre $\Delta^p u_{n+1}$ placé au-dessous de lui, moins le nombre $\Delta^{p+1} u_n$ qui est à sa droite.

On procédera donc de la manière suivante :

— 7	—72	71	—30	6
— 6	— 1	41	—24	6
— 5	40	17	—18	6
— 4	57	— 1	—12	6
— 3	56	—13	— 6	6
— 2	43	—19	0	6
— 1	24	—19	6	6
x	u	Δ	Δ^2	Δ^3

La ligne horizontale inférieure contient la valeur de la fonction et ses différences successives pour $x = -1$; valeurs trouvées précédemment, et l'on a répété la différence troisième constante 6. Si de la différence seconde 6 on retranche la différence troisième 6, on a la différence seconde 0 qui correspond à $x = -2$; si de la différence première — 19 on retranche la différence seconde 0, on a la différence première —19 qui correspond à $x = -2$; enfin, si du nombre 24 on retranche cette différence première — 19, on obtient la valeur 43 du polynôme pour $x = -2$. On a formé de la sorte la seconde ligne horizontale au moyen de la première. De la seconde on déduira de même la troisième ; on dira : 0 moins 6 donne — 6 ; — 19 moins — 6..... — 13 ; 43 moins — 13..... 56 ; telle est la valeur du polynôme pour $x = -3$. Continuons encore : — 6 moins 6..... — 12 ; — 13 moins — 12..... — 1 ; 56 moins — 1..... 57, valeur du polynôme pour $x = -4$, et ainsi de suite. Le calcul se fait ici par lignes horizontales successives. Ordinairement ces deux tableaux sont réunis quand la place le permet, et constituent un seul et même tableau que l'on

peut prolonger à volonté vers le bas par additions successives, vers le haut par soustractions.

176. Soit maintenant un polynôme du quatrième degré

$$u = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3.$$

On substituera directement à la place de x les quatre nombres $-1, 0, 1, 2$, ce qui donne les quatre valeurs correspondantes $-13, 3, 7 -19$, avec lesquelles on forme trois différences premières $16, 4, -26$, deux différences secondes $-12, -30$, et une différence troisième -18; on connaît d'ailleurs la différence quatrième qui est constante et égale à $1.2.3.4.A_0h^4$ ou 24, puisque la fonction est du quatrième degré; les différences suivantes sont nulles. On a ainsi tout ce qu'il faut pour pouvoir effectuer le calcul et le prolonger dans un sens ou dans l'autre.

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
-3	111	-110	96	-66	24
-2	$+1$	-14	30	-42	24
-1	-13	16	-12	-18	24
0	3	4	-30	6	24
1	7	-26	-24	30	24
2	-19	-50	6	54	24
3	-69	-44	60	78	
4	-113	16	138		
5	-97	154			
6	57				

177. Considérons, en général, une fonction entière $u = f(x)$ du degré m; supposons que l'on donne à la va-

riable m valeurs en progression arithmétique

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ \ldots\ldots,\ x_0+(m-1)h,$$

et que l'on connaisse les m valeurs correspondantes

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots,\ u_{m-1}$$

de la fonction. Avec ces m valeurs, on formera $m-1$ différences premières, $m-2$ différences secondes, ..., et enfin une différence de l'ordre $m-1$. La fonction étant entière et du degré m, on sait que sa différence d'ordre m est constante et égale à $1.2\ldots\ldots m A_0 h^m$, et que les différences suivantes sont nulles. On a ainsi tout ce qu'il faut pour calculer le tableau des différences; si l'on effectue le calcul par lignes obliques en descendant, on obtiendra les valeurs de la fonction qui correspondent aux termes suivants $x_0+mh, x_0+(m+1)h,\ldots$, de la progression arithmétique; si, au contraire, on remonte par lignes horizontales, on trouvera les valeurs qui correspondent aux termes précédents x_0-h, x_0-2h, ... En résumé, le calcul de m valeurs par substitution directe suffit pour que l'on puisse trouver toutes les autres.

Il est à remarquer que la substitution directe d'un nombre a à la place de x s'effectue assez simplement d'après le procédé du n° 134. On opérera sans rien écrire comme si l'on voulait diviser le polynôme par $x-a$: le reste est le résultat cherché.

FORMULES D'INTERPOLATION.

Définition.

178. Supposons que l'on ait trouvé par un moyen quelconque les $m+1$ valeurs

$$u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m$$

ne prend une fonction lorsqu'on donne à la variable $m+1$ aleurs

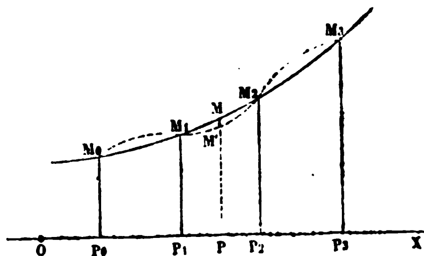
$$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m.$$

nterpoler, c'est trouver les valeurs de la fonction pour les aleurs intermédiaires de la variable.

Par exemple, on a caculé les logarithmes des nombres ntiers de 10000 à 100000. Interpoler, c'est trouver le logarithme d'un nombre fractionnaire compris dans l'un des ntervalles.

Autre exemple : par des expériences directes, on a mesuré la tension de la vapeur d'eau pour des températures e 10 en 10 degrés, depuis 100 jusqu'à 200 degrés. Interpoler, c'est trouver la tension de la vapeur pour une température intermédiaire.

Le problème de l'interpolation n'est pas déterminé, parce qu'on ne connaît pas en général la nature de la fonction, mais seulement certaines valeurs particulières, et qu'il est impossible d'en déduire rigoureusement les autres valeurs ; on conçoit, en effet, qu'il existe une infinité de fonctions qui prennent des valeurs données pour $m+1$ valeurs de la variable, sans qu'elles se confondent pour cela dans les intervalles. Afin de bien mettre ceci en évidence, imaginons que l'on représente les valeurs données de la fonc-



tion par des ordonnées comme au n° 174, et supposons que l'on trace une courbe passant par les $m + 1$ points M_0, M_1, M_2,...., ainsi obtenus; l'ordonnée de cette courbe représentera une certaine fonction $u = f(x)$ admettant les $m + 1$ valeurs données; si maintenant l'on donne à x une valeur intermédiaire OP quelconque et que l'on mesure la longueur de l'ordonnée correspondante MP, on aura la valeur cherchée de la fonction; la courbe tracée résout donc le problème de l'interpolation. Mais il est évident que par les $m + 1$ points donnés, on peut faire passer une infinité de courbes. Ces diverses courbes donneront pour la même valeur OP de x des valeurs différentes MP, M'P. Ainsi il y a indétermination. Si l'on emploie une courbe pour effectuer l'interpolation, ce qui est un moyen très-commode dans la pratique, on aura soin de la tracer aussi unie que possible, en évitant les sinuosités inutiles.

En algèbre, on effectue l'interpolation en cherchant une fonction entière du degré m qui admette les $m + 1$ valeurs données. Alors la question est complétement déterminée; nous démontrerons, en effet, qu'il existe toujours une fonction entière du degré m jouissant de ces propriétés, et qu'il n'en existe qu'une. Une fois cette fonction trouvée, on pourra calculer les valeurs qu'elle prend pour des valeurs intermédiaires quelconques de x; mais ces valeurs calculées ne doivent être considérées que comme des valeurs approchées de la fonction inconnue. On conçoit que les erreurs commises seront d'autant plus petites que le nombre des valeurs données sera plus grand et surtout que les intervalles seront plus petits.

Formule de Lagrange.

179. La question que nous avons à résoudre est la sui-

vante : trouver une fonction entière du degré m qui admette $m+1$ valeurs données

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots,\ u_m$$

pour $m+1$ valeurs données

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_m$$

de la variable x.

Proposons-nous d'abord de déterminer une fonction entière du degré m qui prenne la valeur u_0 pour $x=x_0$, et s'annule pour les m valeurs x_1, x_2, ... x_m de la variable x. Ce polynôme entier du degré m, que nous désignerons par X_0, devant admettre les m racines x_1, x_2, ... x_m, sera de la forme

$$X_0 = A_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_m).$$

On déterminera la constante A_0 par la condition que le polynôme prenne la valeur u_0 pour $x=x_0$, ce qui donne la relation

$$u_0 = A_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots\ldots(x_0-x_m);$$

d'où

$$A_0 = \frac{u_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots\ldots(x_0-x_m)};$$

on aura donc

$$X_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots\ldots(x_0-x_m)}u_0.$$

Proposons de même de déterminer une fonction entière du degré m prenant la valeur u_1 pour $x=x_1$ et s'annulant pour les m valeurs x_0, x_2, x_3, ... x_m de la variable x. Ce polynôme, que nous désignerons par X_1, devant admettre les m racines x_0, x_2, x_3, ... x_m, sera de la forme

$$X_1 = A_1(x-x_0(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_m),$$

et l'on déterminera la constante A_1 par la condition que le polynôme prenne la valeur u_1 pour $x = x_1$, ce qui donne la relation

$$u_1 = A_1 (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots\ldots (x_1 - x_m),$$

d'où

$$A_1 = \frac{u_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots\ldots (x_1 - x_m)},$$

et par suite

$$X_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \ldots\ldots (x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots\ldots (x_1 - x_m)} u_1.$$

Nous formerons, suivant la même loi, une fonction entière X_2 du degré m qui prenne la valeur u_2 pour $x = x_2$ et s'annule pour les m autres valeurs x_0, x_1, x_3, ... x_m de la variable x, etc.; enfin une fonction entière X_m du degré m prenant la valeur u_m pour $u = x_m$ et s'annulant pour les m autres valeurs x_0, x_1, x_2, ... x_{m-1} de la variable x.

Revenons maintenant à la question proposée. Il s'agit de trouver une fonction entière du degré m qui admette les $m + 1$ valeurs données

$$u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m,$$

pour les $m + 1$ valeurs

$$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m,$$

de la variable x. Il est clair que la fonction

$$u = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_m,$$

somme des $m + 1$ fonctions précédentes, jouit des propriétés énoncées; car si l'on fait $x = x_0$, la fonction X_0 prenant la valeur u_0 et chacune des autres X_1, X_2, ... X_m s'annulant, on aura $u = u_0$. De même si l'on fait $x = x_1$, la fonction X_1

prenant la valeur u_1 et chacune des autres X_0, X_2, ... X_m s'annulant, on a $u = u_1$; et ainsi de suite. Enfin, si l'on fait $x = x_m$, la fonction X_m prenant la valeur u_m et chacune des autres s'annulant, on aura $u = u_m$.

Ainsi la fonction cherchée u est donnée par la formule suivante, trouvée par Lagrange,

$$(A) \quad u = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x_0 - x_m)} u_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots\ldots(x_1 - x_m)} u_1 + \ldots\ldots$$

180. Nous avons trouvé une fonction entière du degré m jouissant des propriétés énoncées. On démontre aisément qu'il n'en existe qu'une, c'est-à-dire que si deux polynômes entiers du degré m sont égaux pour $m + 1$ valeurs de x, ils sont identiques. Soient, en effet,

$$Ax^m + Bx^{m-1} \ldots\ldots + H,$$
$$A'x^m + B'x^{m-1} \ldots\ldots + H',$$

ces deux polynômes; en les retranchant l'un de l'autre, on aurait une équation du degré m

$$(A - A')x^m + (B - B')x^{m-1} + \ldots\ldots + (H - H') = 0,$$

ayant $m + 1$ racines, ce qui est impossible. Il faut donc que les coefficients soient respectivement égaux, et alors les deux polynômes sont identiques.

Formule de Newton.

181. La formule de Lagrange est générale; elle est vraie quelles que soient les $m + 1$ valeurs données à la variable;

celle de Newton se rapporte spécialement au cas où ces valeurs sont en progression arithmétique.

Soient

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ldots\ldots,x_0+nh,\ldots\ldots x_0+mh$$

les $m+1$ valeurs données à la variable x;

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots\ldots u_n,\ldots\ldots,u_m$$

les valeurs correspondantes de la fonction u. Avec ces $m+1$ valeurs on peut former les m différences sucessives

$$\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ldots\ldots\Delta^m u_0.$$

Reprenons la formule (α) du n° 169

$$u_n=u_0+\frac{n}{1}\Delta u_0+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0+\ldots\ldots+\Delta^n u_0,$$

qui exprime un terme quelconque de la suite proposée au moyen du premier et de ses n différences successives. Le second membre s'arrête à $\Delta^n u_0$; mais on peut, sans inconvénient, le prolonger jusqu'à $\Delta^m u_0$ et l'écrire de la manière suivante

$$(1)\qquad u_n=u_0+\frac{n}{1}\Delta u_0+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots m}\Delta^m u_0;$$

car les termes ajoutés ainsi, contenant le facteur $n-n$, sont nuls. Appelons x un terme quelconque x_0+nh de la progression arithmétique, et u la valeur correspondante u_n de la fonction. Nous posons $x=x_0+nh$; il en résulte $n=\frac{x-x_0}{h}$. Si l'on remplace n par sa valeur dans l'équa-

tion (1), il vient

$$(B)\quad u=u_0+\frac{x-x_0}{h}\frac{\Delta u_0}{1}+\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-m+1\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2\ldots\ldots m}.$$

On voit d'abord que le second membre de l'équation (B) est une fonction entière du degré m par rapport à x; car le second terme est du premier degré, le troisième du second, ... ; le dernier, étant un produit de m facteurs du premier degré, est du degré m; ce terme du degré m, ne pouvant se réduire avec aucun autre, subsistera nécessairement dans le polynôme qui sera ainsi du degré m. On voit ensuite que cette fonction prend les $m+1$ valeurs données $u_0, u_1, \ldots\ldots u_m$ pour les $m+1$ valeurs données de x; car si dans cette fonction on remplace x par un terme quelconque x_0+nh de la progression arithmétique, ou $\frac{x-x_0}{h}$ par n, elle devient évidemment égale au second membre de l'équation (1), c'est-à-dire à la quantité u_n.

Ainsi la formule (B) nous donne bien la fonction entière du degré m, qui, pour $m+1$ valeurs données de x en progression arithmétique, prend les $m+1$ valeurs données $u_0, u_1, \ldots\ldots\ldots u_m$. C'est la formule d'interpolation de Newton. Elle contient, non pas précisément les valeurs données de la fonction, mais les différences successives qu'on en déduit, et ceci est un grand avantage, parce que, ces différences diminuant en général très-rapidement, on se bornera dans la pratique aux premiers termes, et on négligera tous les autres.

182. Afin de simplifier, posons $\frac{x-x_0}{h}=z$, la formule (B)

devient

$$(C)\qquad u = u_0 + \frac{z}{1}\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{z(z-1)\ldots\ldots(z-m+1)}{1.2\ldots\ldots m}\Delta^m u_0.$$

Supposons que l'on interpole dans le premier intervalle, c'est-à-dire de x_0 à $x_0 + h$; z sera une fraction moindre que l'unité.

Lorsque les différences d'un ordre supérieur au premier sont assez petites pour qu'on puisse les négliger, la formule se réduit à ses deux premiers termes

$$u = u_0 + z\Delta u_0.$$

L'accroissement $u - u_0$ de la fonction est proportionnel à l'accroissement z de la variable ; on dit dans ce cas que l'on interpole par parties proportionnelles. C'est le mode très-simple d'interpolation que l'on emploie quand, au moyen des tables de logarithmes, on cherche les logarithmes des nombres fractionnaires. Réciproquement, si l'on veut trouver la valeur de la variable qui rend la fonction égale à une quantité donnée u, on aura $z = \frac{u - u_0}{\Delta u_0}$.

Lorsque l'on conserve les deux premières différences, la formule d'interpolation devient

$$u = u_0 + z\Delta u + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0.$$

Alors la question inverse se résout au moyen d'une équation du second degré, dont on calculera la racine comprise entre o et 1, l'autre racine étant en général très-grande à cause de la petitesse du coefficient de z^2 (1[re] partie, n° 157).

Exemples.

' La fonction $u = \log x$ a pour différences successives

$$\text{log}(x+h-\log x)=\log\left(1+\frac{h}{x}\right)=\mathrm{M}\left(\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2.x^2}+\frac{h^3}{3.x^3}-\ldots\right),$$

$$\text{log}(x+2h)-2\log(x+h)+\log x=\log\left(1+\frac{2h}{x}\right)-2\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$-\mathrm{M}\left(\frac{h^2}{x^2}-\frac{2h^3}{x^3}+\ldots\ldots\right),$$

$$\text{log}(x+3h)-3\log(x+2h)+3\log(x+h)-\log x$$

$$\text{og}\left(1+\frac{3h}{x}\right)-3\log\left(1+\frac{2h}{x}\right)+3\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{2h^3}{x^3}-\ldots\ldots\right).$$

our $h = 1$ et $x = 1000$, on a

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0{,}00004\ 34270\ 76863\,,\\ \Delta^2 u &= -0{,}00000\ 00043\ 42076\,,\\ \Delta^3 u &= 0{,}00000\ 00000\ 00868.\end{aligned}$$

n voit que les différences décroissent très-rapidement; ifférence seconde étant moindre que l'unité du huitième e décimal, on peut la négliger lorsqu'on prend les rithmes avec sept décimales, comme cela a lieu avec tables de Callet, et interpoler par parties proportion- es.

' Proposons-nous de calculer le logarithme de π au 'en d'une table contenant les logarithmes des nombres 1 à 1000 avec dix décimales. Prenant dans cette table logarithmes des nombres 3,14, 3,15, ... , et ulant les différences successives, on formera le tableau ant :

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
3,14	0,49692 96481	138 09057	—43769	277	—3
3,15	0,49831 05538	137 65288	—43492	274	
3,16	0,49968 70826	137 21796	—43218		
3,17	0,50105 92622	136 78578			
3,18	0,50242 71200				

On négligera donc les différences d'un ordre supérieur au quatrième, et l'on interpolera au moyen de la formule

$$u = u_0 + z\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_0.$$

Puisque $\pi = 3,14159\ 26536$ et que $h = 0,01$, on a $z = 0,159\ 26536$. Substituant cette valeur de z dans la formule précédente et effectuant les multiplications par la méthode abrégée, on trouvera avec dix décimales exactes,

$$\log \pi = 0,49714\ 98726.$$

APPLICATION DE LA MÉTHODE D'INTERPOLATION DE NEWTON À LA REPRÉSENTATION EXACTE D'UNE FONCTION ENTIÈRE DU DEGRÉ m DONT ON CONNAÎT LES VALEURS u_0, u_1, u_2, ... u_m CORRESPONDANTES AUX VALEURS x_0, x_0+h, x_0+2h, ... x_0+mh.

183. Cette question n'offre aucune difficulté ; c'est la question même que l'on a résolue quand on a cherché la formule d'interpolation de Newton (n° 181). Au moyen des valeurs données

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots.,\ u_m,$$

on formera la suite des différences

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots\ldots,\ \Delta^m u_0\,;$$

on remplacera dans la formule (B) ces différences par leurs valeurs, et on aura la fonction entière demandée.

On demande, par exemple, la fonction entière du troisième degré, qui admet les valeurs 5, —8, —9, 8, pour les quatre valeurs 0, 1. 2, 3 de la variable. Le tableau des différences donne $u_0 = 5$, $\Delta u_0 = -13$, $\Delta^2 u_0 = 12$, $\Delta^3 u_0 = 6$; substituant dans la formule (B), on a la fonction cherchée

$$u = 5 - 13x + 6x(x-1) + x(x-1)(x-2),$$

ou, en ordonnant,

$$u = x^3 + 3x^2 - 17x + 5.$$

Autre exemple : Trouver la fonction entière du quatrième degré qui admet les valeurs 1, — 13, 3, 7, — 19, pour les cinq valeurs — 2, — 1, 0, 1, 2 de x. On formera les différences

$$u_0 = 1,\ \Delta u_0 = -14.\ \Delta^2 u_0 = 30,\ \Delta^3 u_0 = -42,\ \Delta^4 u_0 = 24,$$

que l'on substituera dans la formule (B), ce qui donne

$$u = 1 - 14(x+2) + 15(x+2)(x+1) - 7(x+2)(x+1)x \\ + (x+2)(x+1)x(x-1).$$

ou, en ordonnant,

$$u = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3.$$

SI LA DIFFÉRENCE h ET LES QUANTITÉS u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, ... $\Delta^m u_0$ SONT POSITIVES, $x_0 + (m-1)h$ EST UNE LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES POSITIVES DE L'ÉQUATION $f(x) = 0$.

184. Imaginons que la fonction entière $u = f(x)$ du degré

m soit représentée par la formule (B)

$$u = u_0 + \frac{x - x_0}{h}\frac{\Delta u_0}{1} + \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\ldots\ldots\left(\frac{x - x_0}{h} - m + 1\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2\ldots m},$$

comme nous venons de l'expliquer, et supposons que toutes les quantités

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots\ldots,\ \Delta^m u_0$$

soient positives, la raison h de la progression étant aussi positive. Si l'on donne à la variable x une valeur supérieure à $x_0 + (m - 1)h$, tous les facteurs binômes que renferme le second membre deviendront positifs; car le dernier

$$\frac{x - x_0}{h} - (m - 1),$$

qui est le plus petit d'entre eux, acquiert alors une valeur positive; la fonction étant une somme de termes positifs, a nécessairement une valeur positive. Il en est de même si l'on donne à x la valeur $x_0 + (m - 1)h$, car cette valeur, annulant le dernier facteur binôme et par conséquent le dernier terme, mais laissant positifs tous les autres, le polynôme sera encore une somme de termes positifs. Ainsi, x croissant indéfiniment à partir de $x_0 + (m - 1)h$, la fonction conservera toujours une valeur positive sans devenir nulle; donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de racine positive égale ou supérieure à la quantité $x_0 + (m - 1)h$. Cette quantité est une limite supérieure des racines positives de l'équation; on donne en général ce nom à toute quantité positive plus grande que la plus grande raison positive.

Dans l'exemple du n° 175, nous voyons que, pour $x = 3$,

le polynôme a une valeur positive 8 et que les différences correspondantes 41, 30, 6 sont aussi positives. En faisant $h = 1$ et $x_0 = 3$ dans la formule $x_0 + (m-1)h$, on en conclut que 5 est une limite supérieure des racines positives de l'équation

$$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0.$$

De même, dans l'exemple du n° 176, nous voyons que pour $x = 6$ le polynôme a une valeur positive 57, et que toutes les différences correspondantes sont aussi positives; car pour les former on n'aurait à additionner que des quantités positives. Le degré m étant ici égal à 4, on en conclut que $6 + 3$ ou 9 est une limite supérieure des racines positives de l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0.$$

CHAPITRE VIII.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES A LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS.

SÉPARATION DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE PAR LA SUBSTITUTION DE DIFFÉRENTS NOMBRES A L'INCONNUE. — ÉTUDE SPÉCIALE DU CAS D'UNE ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ. — SUBSTITUTION DE NOMBRES ENTIERS PAR LE MOYEN DES DIFFÉRENCES. — SUBSTITUTION DE NOMBRES ÉQUIDISTANTS D'UN DIXIÈME ENTRE DEUX NOMBRES ENTIERS CONSÉCUTIFS; DE NOMBRES ÉQUIDISTANTS D'UN CENTIÈME ENTRE DEUX NOMBRES ÉQUIDISTANTS D'UN DIXIÈME, ETC., SOIT POUR SÉPARER LES RACINES, SOIT POUR EN APPROCHER. — CES DERNIÈRES SUBSTITUTIONS S'EFFECTUENT AU MOYEN DE NOUVELLES DIFFÉRENCES DÉDUITES DES PREMIÈRES. — USAGE DES CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES DANS L'APPLICATION DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE.

Résolution des équations du troisième degré.

185. *Séparer* les racines d'une équation, c'est trouver des intervalles dans lesquels soient comprises les diverses

ines réelles de l'équation, de manière qu'il n'y ait une racine dans chaque intervalle. Pour effectuer la séparation des racines, on substitue ordinairement des nombres équidistants, et quand il s'agit d'une équation algébrique, on abrége beaucoup les calculs par le moyen des différences.

Reprenons l'équation du troisième degré

$$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0.$$

théorème de Descartes sur les variations montre que te équation a une racine réelle négative, le nombre des racines positives étant deux ou zéro. En substituant directement les trois nombres -1, 0, $+1$, et continuant le calcul par les différences, comme nous l'avons expliqué au 175, on obtient le tableau suivant :

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3
-6	-1	41	-24	6
-5	40	17	-18	6
-4	57	-1	-12	6
-3	56	-13	-6	6
-2	43	-19	0	6
-1	24	-19	6	6
0	5	-13	12	6
1	-8	-1	18	
2	-9	17		
3	8			

Le polynôme ayant des valeurs de signes contraires ur $x = 0$ et $x = 1$, on en conclut qu'une première racine elle positive est comprise entre 0 et 1 ; la seconde ra-

cine positive est comprise entre 2 et 3; la racine négative entre —6 et —5. L'équation proposée a ses trois racines réelles, et ces racines sont séparées.

On a ainsi les racines à moins d'une unité près. Pour avoir l'une d'elles à un dixième près, on subtituera des nombres équidistants d'un dixième dans l'intervalle qui la comprend. Par exemple, pour trouver la racine comprise entre 2 et 3, on substituera des nombres équidistants d'un dixième de 2 à 3. On pourrait substituer directement trois nombres 2; 2,1; 2,2; puis continuer par les différences; mais on évite la substitution directe des deux nombres 2,1 et 2,2 qui entraînerait à des calculs assez longs, en cherchant les différences successives qui se rapportent à $x=2$ quand la racine de la progression arithmétique devient égale à $\frac{1}{10}$ et déduisant ces nouvelles différences des premières.

186. Nous allons expliquer une manière simple d'effectuer ce calcul pour le cas spécial du troisième degré.

Soit $f(x)$ un polynôme du troisième degré. On a d'abord

$$\Delta f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3.$$

Si l'on appelle $\varphi(x)$ le second membre, qui est un polynôme du second degré, on aura de même

$$\Delta^2 f(x)h = \Delta\varphi(x) = \varphi'(x)h + \frac{\varphi''(x)}{2}h^2.$$

Or, en dérivant le polynôme $\varphi(x)$ et remarquant que $f'''(x)$ est une constante, on a

$$\varphi'(x) = f''(x)h + \frac{f'''(x)}{2}h^2,$$
$$\varphi''(x) = f'''(x)h;$$

substituons dans $\Delta^2 f(x)$, il vient

$$\Delta^2 f(x) = f''(x)h^2 + f'''(x)h^3.$$

Enfin, si l'on appelle $\psi(x)$ le second membre qui est un polynôme du premier degré, on aura

$$\Delta^3 f(x) = \Delta\psi(x) = \psi'(x)h = f'''(x)h^3.$$

Ainsi nous avons trouvé

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3,\\
\Delta^2 f(x) &= f''(x)h^2 + f'''(x)h^3,\\
\Delta^3 f(x) &= f'''(x)h^3.
\end{aligned}$$

La différence troisième est constante. La seconde expression peut être remplacée par une autre plus simple ; car on a par définition

$$\Delta^3 f(x-h) = \Delta^2 f(x) - \Delta^2 f(x-h),$$

d'où l'on déduit

$$\Delta^2 f(x-h) = \Delta^2 f(x) - \Delta^3 f(x-h) = f''(x)h^2.$$

Il en résulte finalement les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta^3 f(x) &= f'''(x)h^3,\\
\Delta^2 f(x-h) &= f''(x)h^2,\\
\Delta f(x) &= hf'(x) + \frac{\Delta^2 f(x-h)}{2} + \frac{\Delta^3 f(x)}{6}.
\end{aligned}$$

Nous remarquons que $f'''(x)h^3$ égale la différence troisième, que $f''(x)h^2$ égale la différence seconde antérieure, c'est-à-dire celle qui correspond à $x-h$, et que, pour trouver $f'(x)h$, il faut de la différence première retrancher la moitié de la différence seconde antérieure, et le sixième de la différence troisième.

Supposons maintenant que la raison de la progression arithmétique devienne dix fois plus petite, c'est-à-dire égale à $\frac{h}{10}$, et désignons par δ les différences qui correspondent à cette nouvelle progression; pour trouver ces nouvelles différences, il suffira, dans les expressions précédentes, de remplacer la lettre Δ par δ et h par $\frac{h}{10}$, ce qui donne

$$\delta^3 f(x) = \frac{f'''(x)h^3}{1000} = \frac{\Delta^3 f(x)}{1000},$$

$$\delta^2 f\left(x - \frac{h}{10}\right) = \frac{f''(x)h^2}{100} = \frac{\Delta^2 f(x-h)}{100},$$

$$\delta f(x) = \frac{f'(x)h}{10} + \frac{\delta^2 f\left(x - \frac{h}{10}\right)}{2} + \frac{\delta^3 f(x)}{6}.$$

La comparaison de ces formules avec les précédentes nous donne les règles suivantes : 1° *On obtient la nouvelle différence troisième en divisant par* 1000 *l'ancienne différence troisième.* 2° *On obtient la nouvelle différence seconde antérieure en divisant par* 100 *l'ancienne différence seconde antérieure.* 3° *Pour trouver la nouvelle différence première, de l'ancienne différence première retranchez la moitié de l'ancienne différence seconde antérieure et le sixième de la différence troisième, divisez le résultat par* 10 *et ajoutez-y la moitié de la nouvelle différence seconde antérieure et le sixième de la différence troisième.*

187. Exemple I. Appliquons cette méthode à l'équation

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0.$$

Cette équation a une racine comprise entre 0 et 1; pour calculer cette racine à un dixième près, nous supposerons

que la raison de la progression arithmétique, qui était l'unité, devienne égale à $\frac{1}{10}$, et nous formerons le tableau suivant :

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3
— 0,1	. . . . .	. . . . .	0,060	0,006
0,0	5,000	— 1,669	0,066	0,006
0,1	3,331	— 1,603	0,072	0,006
0,2	1,728	— 1,531	0,078	
0,3	0,197	— 1,453		
0,4	— 1,256			

Nous supposons ici que, dans les formules de transformation, $x = 0$. En divisant par 1000 l'ancienne différence troisième 6, on a la nouvelle 0,006 ; l'ancienne différence seconde antérieure 6, celle qui correspond à $x = -1$, divisée par 100, donne la nouvelle différence seconde antérieure 0,06, celle qui correspond à — 0,1. Si de l'ancienne différence première — 13, on retranche $3 + 1 = 4$, c'est-à-dire la moitié de la différence seconde antérieure 6 et le sixième de la différence troisième 6, on a — 17, valeur de $f'(0)$; divisant ce résultat par 10 et à — 1,7 ajoutant $0{,}03 + 0{,}001 = 0{,}031$, c'est-à-dire la moitié de la nouvelle différence seconde antérieure 0,06 et le sixième de la différence troisième 0,006, on a la nouvelle différence première — 1,669. Avec cela on peut continuer le tableau. On voit que la racine est comprise entre 0,3 et 0,4.

Si l'on veut obtenir cette racine à un centième près, on partagera l'intervalle de 0,3 à 0,4 en dix parties égales ; la raison de la progression arithmétique, qui était $\frac{1}{10}$, de-

vient égale à $\frac{1}{100}$; on déduira donc les nouvelles différences des précédentes d'après la règle énoncée.

		Δ	Δ²	Δ³
0,29	....	......	780	6
0,30	0,197000	—148909	786	
0,31	0,048091	—148123		
0,32	—0,100032			

Les nouvelles différences renferment six chiffres décimaux; pour abréger, nous les écrivons en transportant la virgule de six rangs vers la droite. La racine est comprise entre 0,31 et 0,32.

Pour avoir la racine à un millième près, on partagera en dix parties égales l'intervalle de 0,31 à 0,32, et des dernières différences on déduira les nouvelles d'après le même procédé.

		Δ	Δ²	Δ³
0,309	....	......	7860	6
0,310	0,048091000	—14847769	7866	
0,311	0,033243231	—14839903	7872	
0,312	0,018403328	—14832031	7878	
0,313	0,003571297	—14824153		
0,314	—0,011252856			

La racine est comprise entre 0,313 et 0,314.

188. Exemple II. Dans l'exemple précédent, les racines ont été séparées par la substitution des nombres entiers;

mais il n'en est pas toujours ainsi. Dans ce cas, on examine dans quel intervalle sont situées les racines qui n'ont pas été séparées, et l'on partage cet intervalle en dix parties égales. Soit l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Le tableau de substitution des nombres entiers

−4	−29	30	−18	6
−3	1	12	−12	6
−2	13	0	−6	6
−1	13	−6	0	6
0	7	−6	6	6
1	1	0	12	
2	1	12		
3	13			

ne présente qu'un changement de signe, de -3 à -4; il y a une racine négative dans cet intervalle; d'ailleurs, l'équation transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation, l'équation proposée n'admet pas d'autre racine négative. La condition de réalité des racines (n° 165) étant ici satisfaite, il en résulte que l'équation a deux racines positives, mais elles ne sont pas encore séparées. Tous les nombres entiers positifs donnent en effet au polynôme des valeurs positives; on le reconnaît dès que $x = 1$; car lorsqu'on arrive à une ligne oblique composée de nombres positifs, les calculs suivants, consistant à ajouter les uns aux autres des nombres positifs, conduiront toujours à des résultats positifs. D'ailleurs la valeur du polynôme pour $x = 1$, et les différences correspondantes étant positives, le nombre 3 est une limite supérieure des racines; ainsi les deux racines positives sont comprises entre 0 et 3, et elles sont toutes les

deux situées dans le même intervalle; il s'agit de voir dans lequel. Considérons pour cela l'équation

$$3x^2 - 7 = 0$$

obtenue en égalant à zéro la dérivée du premier membre de l'équation proposée ; nous savons (n° 162) qu'entre les deux racines positives de l'équation proposée, il y a une racine de la dérivée ; cette racine est la racine positive $\sqrt{\frac{7}{3}}$, supérieure à 1, mais inférieure à 2. Mais l'intervalle qui comprend les deux racines cherchées doit comprendre aussi la quantité $\sqrt{\frac{7}{3}}$, qui est située entre elles ; donc cet intervalle est celui de 1 à 2. Afin de séparer les racines, nous partagerons cet intervalle en dix parties égales.

0,9			60	6
1,0	1,000	—369	66	6
1,1	0,631	—303	72	6
1,2	0,328	—231	78	6
1,3	0,097	—153	84	6
1,4	—0,056	— 69	90	6
1,5	—0,125	+ 21	96	6
1,6	—0,104	117	102	6
1,7	+0,013	219	108	6
1,8	0,232	32	114	
1,9	0,559	441		
2,0	1,000			

On voit que l'une des racines est comprise entre 1,3 et 1,4, l'autre entre 1,6 et 1,7.

Voici le calcul de ces deux racines à un centième près :

1, 9			780	
1,30	0,097000	—18909	786	6
1,31	0,078091	—18123	792	6
1,32	0,059968	—11337	798	6
1,33	0,042637	—16533	804	6
1,34	0,026104	—15729	810	
1,35	0,010375	—14919		
1,36	—0,004544			

La première racine est comprise entre 1,35 et 1,36.

Comme la seconde racine est beaucoup plus près de 1,7 que de 1,6, parce que la première valeur donne au polynôme une valeur absolue beaucoup plus petite que la seconde, on abrégera les calculs en partant de 1,7 et rétrogradant

1,69	—0,003191	16191	1020	6
1,70	+0,013000	17211		

La seconde racine est comprise entre 1,60 et 1,70.

189. Exemple III. Considérons encore l'équation

$$f(x) = x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0.$$

Substituons d'abord les nombres entiers :

— 1	293	—112	22	6
0	181	— 90	28	6
1	91	— 62	34	6
2	29	— 28	40	6
3	1	+ 12	46	
4	13	58		
5	71			

L'équation transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation,

l'équation proposée a une racine négative et une seule; en prolongeant le tableau vers le haut, on verrait qu'elle est comprise entre — 17 et — 18. Les deux autres racines seront réelles positives, ou imaginaires. Les nombres entiers positifs donnent tous des résultats positifs; car, dès $x = 3$, on n'a que des nombres positifs à ajouter. Ainsi les deux racines positives, si elles existent, seront comprises dans le même intervalle. Pour reconnaître cet intervalle, on examinera les racines de l'équation

$$f'(x) = 3x^2 + 22x - 102 = 0,$$

qui sont réelles, l'une positive, l'autre négative. La racine positive $x' = \frac{-11 + \sqrt{427}}{3} = 3,22\ldots$ devant être comprise entre les deux racines positives de l'équation proposée, on en conclut que, si l'équation proposée admet des racines positives, elles seront comprises entre 3 et 4. Partageons cet intervalle en dix parties égales :

2,9			400	6
3,0	1,000	—0,699	406	6
3,1	0,301	—0,293	412	
3,2	0,008	+0,119		
3,3	0,127			

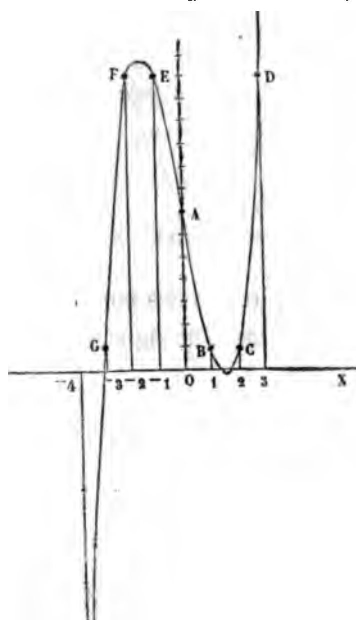
Il est inutile de prolonger le tableau; car, arrivé à 3,2, on n'a que des nombres positifs à ajouter; ainsi il n'y a pas de changement de signe, et les deux racines sont encore renfermées dans le même intervalle. D'après la valeur de x' cet intervalle est celui de 3,2 à 3,3; nous le partagerons en dix parties égales :

3,19			4120	6
3,20	+0,008000	−6739	4126	6
3,21	+0,001261	−2613	4132	
3,22	−0,001352	+1519		
3,23	+0,000167			

Il existe effectivement deux racines réelles positives, l'une comprise entre 3,21 et 3,22, l'autre entre 3,22 et 3,23.

190. Remarque. Des considérations géométriques aident souvent à discerner l'intervalle dans lequel sont comprises les racines, lorsqu'elles ne sont pas séparées.

Reprenons l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$. Construisons les ordonnées correspondant aux valeurs entières de la variable, et traçons une courbe par les points ainsi obtenus. La dérivée $f'(x)$ étant du second degré ne peut s'annuler que deux fois et la courbe ne présentera qu'un maximum et un minimum. Le maximum a lieu entre E et F. Le minimum devra être situé nécessairement entre les points B et C; donc c'est dans cet intervalle que seront comprises les deux racines réelles positives.



L'emploi de la courbe ne réussit pas aussi bien pour l'équation

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0.$$

Si l'on trace la courbe, on voit que le minimum a lieu entre 2 et 3 ou entre 3 et 4, probablement entre 3 et 4; mais cependant on ne peut le décider d'une manière certaine. Il faut alors recourir aux racines de l'équation $f'(x)=0$, qui, dans tous les cas, permettront de décider immédiatement la question.

191. Exemple IV. Soit l'équation

$$f(x)=x^3-2x^2+5x-7=0.$$

La substitution des nombres entiers ne donne qu'un changement de signe de 1 à 2. L'équation

$$f'(x)=3x^2-4x+5=0$$

ayant ses racines imaginaires, l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, et elle est comprise entre 1 et 2.

Exemple V. L'équation

$$f(x)=x^3-4x^2+5x-7=0$$

n'a pas de racine négative; la substitution des nombres entiers positifs ne donne qu'un changement de signe, de 3 à 4. L'équation

$$f'(x)=3x^2-8x+5=0$$

a ses racines réelles 1 et $\frac{5}{3}$. Si l'équation proposée avait ses trois racines réelles, la plus petite racine 1 de la dérivée devrait donner un résultat positif, la plus grande $\frac{5}{3}$ un résultat négatif; la valeur du polynôme pour $x=1$ étant négative, on en conclut que l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, et cette racine est comprise entre 3 et 4.

EXEMPLE VI. La substitution des nombres entiers dans le premier membre de l'équation

$$f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 3x - 1 = 0$$

ne donne qu'un changement de signe, de 1 à 2. L'équation $f'(x) = 0$ a ses deux racines, $x' = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, $x'' = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, réelles et comprises entre 0 et 1. Il faudrait substituer par dixième dans cet intervalle; si le nouveau tableau ne présente pas de changement de signe, il faudrait substituer par centièmes dans l'intervalle qui comprend x', et ainsi de suite. Mais on s'expose ainsi à faire une longue suite de calculs inutiles, si l'on n'arrive pas à un changement de signe, et après lesquels il serait impossible de rien conclure. Il vaut mieux simplifier d'abord l'équation, en faisant disparaître le terme du second degré, et y appliquer le caractère de réalité des racines. Pour opérer cette simplification, on remplacera x par $x + \frac{1}{2}$; l'équation devient

$$x^3 - \frac{3}{8}x - \frac{3}{16} = 0.$$

La condition de réalité n'est pas satisfaite; ainsi l'équation proposée n'a qu'une racine réelle.

Équations d'un degré quelconque.

192. La méthode, dont nous venons de faire usage pour calculer avec une approximation plus ou moins grande les racines d'une équation du troisième degré, s'applique aux équations d'un degré quelconque. Après avoir substitué les nombres entiers, on partagera en dix parties égales les

intervalles dans lesquels se trouvent les racines, puis en dix parties égales les nouveaux intervalles, et ainsi de suite.

Nous allons établir les formules générales au moyen desquelles on peut des anciennes différences déduire les nouvelles. Soient h et h' les racines des deux progressions arithmétiques, k leur rapport $\frac{h'}{h}$; nous désignons par Δ les différences qui se rapportent à la première raison h, par δ celles qui se rapportent à la nouvelle raison h'. La fonction entière du degré m peut être considérée comme déterminée, soit par les valeurs qui correspondent à $m+1$ termes

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ \ldots\ldots,\ x_0+mh$$

de la première progression, soit par celles qui correspondent à $m+1$ termes

$$x_0,\ x_0+h',\ x_0+2h',\ \ldots\ldots,\ x_0+mh'$$

de la seconde; elle sera donc représentée par l'une ou l'autre des deux formules

$$u = u_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{x-x_0}{h}\ldots\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-m+1\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2\ldots\ldots m},$$
$$u = u_0 + \frac{x-x_0}{h'}\delta u_0 + \frac{x-x_0}{h'}\left(\frac{x-x_0}{h'}-1\right)\frac{\delta^2 u_0}{1.2}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{x-x_0}{h'}\ldots\ldots\left(\frac{x-x_0}{h'}-m+1\right)\frac{\delta^m u_0}{1.2\ldots\ldots m}.$$

Si l'on pose pour abréger $\frac{x-x_0}{h}=z$, d'où $\frac{x-x_0}{h'}=\frac{z}{k}$, ces deux formules deviennent

$$(1)\qquad u = u_0 + z\Delta u_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + z(z-1)\ldots\ldots(z-m+1)\frac{\Delta^m u_0}{1.2\ldots\ldots m},$$

$$(2)\qquad u = u_0 + \frac{z}{k}\delta u_0 + \frac{z}{k}\left(\frac{z}{k}-1\right)\frac{\delta^2 u_0}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{z}{k}\left(\frac{z}{k}-1\right)\ldots\ldots\left(\frac{z}{k}-m+1\right)\frac{\delta^m u_0}{1.2\ldots\ldots m}.$$

Ces deux expressions représentant le même polynôme, si on les ordonne par rapport aux puissances de la variable z, les coefficients des mêmes puissances de z doivent être égaux de part et d'autre ; en égalant ces coefficients, on obtiendra des relations entre les anciennes différences et les nouvelles, qui permettront de calculer ces dernières au moyen des premières.

193. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une équation du quatrième degré ; les formules (1) et (2) se réduisent à

$$u = u_0 + z\Delta u_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3}$$

$$+ z(z-1)(z-2)(z-3)\frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4},$$

$$u = u_0 + \frac{z}{k}\delta u_0 + \frac{z}{k}\left(\frac{z}{k}-1\right)\frac{\delta^2 u_0}{1.2} + \frac{z}{k}\left(\frac{z}{k}-1\right)\left(\frac{z}{k}-2\right)\frac{\delta^3 u_0}{1.2.3}$$

$$+ \frac{z}{k}\left(\frac{z}{k}-1\right)\left(\frac{z}{k}-2\right)\left(\frac{z}{k}-3\right)\frac{\delta^4 u_0}{1.2.3.4}.$$

L'identification donne les relations

$$\delta^4 = k^4\Delta^4,$$

$$\delta^3 - \frac{3}{2}\delta^4 = k^3\left(\Delta^3 - \frac{3}{2}\Delta^4\right),$$

$$\delta^2 - \delta^3 + \frac{11}{12}\delta^4 = k^2\left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4\right),$$

$$\frac{\delta}{1} - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} = k\left(\frac{\Delta}{1} - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4}\right).$$

Ces équations sont du premier degré; la première donnera δ^4, la seconde δ^3, la troisième δ^2, la quatrième δ.

194. Exemple VII. Appliquons à l'équation du quatrième degré

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0,$$

Le tableau de substitution des nombres entiers

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
− 2	1	− 14	30	− 42	24
− 1	− 13	+ 16	− 12	− 18	24
0	+ 3	+ 4	− 30	6	24
1	+ 7	− 26	− 24	30	24
2	− 19	− 50	6	54	24
3	− 69	− 44	60	78	24
4	−113	+ 16	138	102	24
5	− 97	+154	240	126	24
6	+ 57	394	366	150	24

montre que l'équation a deux racines positives : une entre 1 et 2, une autre entre 5 et 6; comme elle ne présente que deux variations, elle n'a pas d'autre racine positive.

Pour obtenir ces deux racines à moins d'un dixième, nous partagerons chacun des deux intervalles en dix par-

ties égales, et nous calculerons les nouvelles différences au moyen des formules précédentes

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1,0	7,0000	—1,1609	—3246	—24	24
1,1	5,8391	—1,4855	—3270	0	24
1,2	4,3536	—1,8125	—3270	24	
1,3	2,5411	—2,1395	—3246		
1,4	0,4016	—2,4641			
1,5	—2,0625				

La première racine est comprise entre 1,4 et 1,5.

La seconde étant plus près de 6 que de 5, nous effectuerons le calcul en remontant.

5,7	—19,2949	19,9045	2,1570	1104	24
5,8	10,6096	22,0615	2,2674	1128	24
5,9	32,6711	24,3289	2,3802	1152	24
6,0	57,0000	26,7091	2,4954	1176	24
		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4

Cette seconde racine est comprise entre 5,7 et 5,8.

L'équation proposée a d'ailleurs deux racines négatives : une comprise entre 0 et — 1, l'autre entre — 1 et — 2. On les calculerait de la même manière.

195. Exemple VIII. Appliquons encore à l'équation du quatrième degré

$$f(x) = 8x^4 - 40x^3 + 57x^2 - 40x + 49 = 0.$$

La transformée en $-x$ n'ayant pas de variation, l'équa-

tion n'a pas de racine négative ; elle peut avoir 0, ou 2, ou 4 racines positives. La substitution des nombres entiers positifs

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
—1	194	—145	130	—144	192
0	49	— 15	— 14	48	192
1	34	— 29	34	240	192
2	5	5	274	432	192
3	10				

ne présente pas de variation. L'équation

$$f'(x) = 32x^3 - 120x^2 + 114x - 40 = 0$$

n'a qu'une racine réelle, et elle est comprise entre 2 et 3. On en conclut que l'équation proposée ne pourra avoir au plus que *deux* racines réelles positives et, si elles existent, elles seront comprises entre 2 et 3. On partagera donc cet intervalle en dix parties égales.

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
2,0	5,0000	—3,4852	3352	1728	192
2,1	1,5148	—3,1500	5080	1920	192
2,2	—1,6352	—2,6420	.7000	2112	192
2,3	—4,2772	—1,9420	9112	2304	192
2,4	—6,2192	—1,0308	1,1416	2496	192
2,5	—7,2500	0,1108	1,3912	2688	192
2,6	—7,1392	1,5020	1,6600	2880	192
2,7	—5,6372	3,1620	1,9480	3072	
2,8	—2,4752	5,1100	1,2552		
2,9	2,6348	7.3652			
3,0	10,0000				

Ainsi l'équation a deux racines réelles positives, comprises, l'une entre 2,1 et 2,2, l'autre entre 2,8 et 2,9.

RECHERCHE DES RACINES D'UNE ÉQUATION TRANSCENDANTE. LORSQU'ON A SUBSTITUÉ DES NOMBRES ÉQUIDISTANTS ET ASSEZ VOISINS POUR QUE LES DIFFÉRENCES DES RÉSULTATS PUISSENT ÊTRE CONSIDÉRÉES COMME ÉGALES A PARTIR D'UN CERTAIN ORDRE, ON CONTINUE L'OPÉRATION COMME S'IL S'AGISSAIT D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE.

196. Exemple IX. Soit l'équation

$$10^x = 257x.$$

Si l'on prend les logarithmes vulgaires des deux membres, cette équation devient

$$f(x) = x - (\log x + \log 257) = x - (\log x + 2,4099312) = 0.$$

Substituons d'abord à la variable x les nombres entiers 0, 1, 2, 3,..., en nous bornant à reconnaître le signe de $f(x)$ sans faire de calcul. Pour $x=0$, $\log x = -\infty$; donc $f(x) = +\infty$. Pour $x = 1$, $\log 1 = 0$, $f(1) < 0$. Ainsi il y a une première racine comprise entre 0 et 1. Pour $x = 2$, la parenthèse étant supérieure à 2, on aura encore évidemment $f(2) < 0$. Si l'on ajoute le logarithme de 3, qui est 0,477, au nombre constant 2,409, on voit de suite que l'on aura un résultat plus petit que 3; donc $f(3) > 0$. Ainsi il y a une seconde racine entre 2 et 3. L'équation proposée n'a pas d'autre racine réelle; car l'équation

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0$$

n'a qu'une racine $x = 1$.

Proposons de calculer la racine comprise entre 2 et 3, d'abord à un dixième. On substituera à x les valeurs successives 2,1 ; 2,2 ; ..... Mais on peut diminuer beaucoup le nombre des substitutions. Le logarithme de 2,1 est 0,322 ; ajouté à 2,409, il donne 2,73 ; il en résulte que $x=2,7$ donnera encore un résultat négatif. Il suffit de lire les deux premiers chiffres des logarithmes de 2,8 et de 2,9 pour voir que $x=2,8$ donnera un résultat négatif, 2,9 un résultat positif. Ainsi la racine est comprise entre 2,8 et 2,9.

Cherchons-la maintenant à un centième. Le logarithme de 2,81 ajouté à 2,409 donne 2,85 ; il en résulte que 2,85 donnera encore un résultat négatif. Essayons 2,86 ; le logarithme de 2,86 ajouté à 2,409, donne 2,866 ; le résultat est négatif. Le logarithme de 2,87 ajouté à 2,409 donne 2,867 ; le résultat est positif. Ainsi la racine est comprise entre 2,86 et 2,87.

Calculons-la à un millième. Le logarithme de 2,861 ajouté à 2,4099 donne 2,866 ; on en conclut que 2,86 donne encore un résultat négatif. On essayera 2,867 et 2,868 ; le premier donne un résultat négatif, le second un résultat positif. Ainsi la racine est comprise entre 2,867 et 2,868. On continuerait de la même manière avec une égale facilité.

197. Exemple X. Résoudre l'équation

$$e^x = 10x,$$

ou

$$x-(\mathrm{L}x+\mathrm{L}10)=x-(\mathrm{L}x+2,302\,58.....)=0.$$

On se servira de la table des logarithmes népériens ou hyperboliques qui, dans les tables de Callet, suit la table des logarithmes vulgaires, en substituant les nombres en-

tiers, on reconnaît, comme dans l'exemple précédent, que l'équation a deux racines réelles, et comprises, l'une entre o et 1, l'autre entre 3 et 4.

Proposons-nous de calculer cette dernière à un dixième près. Si l'on pose $x = \frac{x'}{10}$, l'équation devient

$$x' - 10Lx' = 0,$$

et la question revient à calculer à une unité près la racine de cette dernière équation comprise entre 30 et 40. En suivant des yeux la table des logarithmes hyperboliques de 30 à 40 et déplaçant par la pensée la virgule d'un rang vers la droite, on voit que le résultat reste négatif jusqu'à $x' = 35$, et qu'il devient positif pour $x' = 36$. Donc la racine est comprise entre 3,5 et 3,6.

Pour la calculer à un centième près, on posera $x' = \frac{x''}{10}$, l'équation devient

$$x'' + 100L10 - 100Lx'' = x'' + 230{,}258 \ldots\ldots - 100Lx'' = 0,$$

et l'on essayera entre 350 et 360. Comme $100L351 = 586{,}078$, on voit que le résultat sera encore négatif pour $x = 355$. Puisque $100L356 = 587{,}49$, le résultat sera encore négatif pour $x = 357$. Mais $x = 358$ donne un résultat positif. Donc la racine est comprise entre 3,57 et 3,58.

198. Exemple XI. Soit l'équation

$$e^x - e^{-x} = ax$$

que l'on a à résoudre dans le problème de la chaînette, c'est-à-dire lorsque l'on cherche la forme d'équilibre d'une chaîne pesante. Prenons $a = 12{,}54$.

Si l'on pose $y = e^x$, $z = e^{-x}$, l'équation s'écrit

$$u = y - z - 12{,}54 \times x = 0,$$

et l'on calculera y et z par les formules

$$\log y = x \log e = 0{,}43429448 \times x,$$
$$\log z = - \log y.$$

On remarque que $\log e$ est le module M des logarithmes vulgaires.

L'équation est vérifiée par $x = 0$; mais elle admet, en outre, une racine positive que nous nous proposons de déterminer. La valeur $x = 1$ donne évidemment un résultat négatif. Pour $x = 2$, on a $y < 9$, et par conséquent $u < 0$. Si l'on fait le calcul pour les nombres suivants, on trouve

$$x = 3,\ y = 10,\ u = -27,$$
$$x = 4,\ y = 55,\ u = +\ 5.$$

La racine est comprise entre 3 et 4, et elle est beaucoup plus près de 4 que de 3. Dans ces premiers calculs, on peut négliger z et les décimales.

Essayons en rétrogradant

$$x = 3{,}9,\ y = 49{,}402,\ z = 0{,}020,\ u = \quad 0{,}476$$
$$x = 3{,}8,\ y = 44{,}701,\ z = 2{,}022,\ u = -2{,}973.$$

La racine est comprise entre 3,8 et 3,9, et elle est beaucoup plus près de 3,9 que de 3,8. On partagera de même cet intervalle en dix parties égales :

$$x = 3{,}89,\ y = 48{,}9109,\ z = 0{,}0204,\ u = 0{,}1089,$$
$$x = 3{,}88,\ y = 48{,}4242,\ z = 0{,}0207,\ u = 0{,}2416.$$

La racine est comprise entre 3,88 et 3,89.

Partageons cet intervalle en dix parties égales et essayons encore en rétrogradant :

$$x = 3,889,\quad y = 48,86200,\quad z = 0,02047,\quad u = 0,07347$$
$$x = 3,888,\quad y = 48,81316,\quad z = 0,02047,\quad u = 0,03715$$
$$x = 3,887,\quad y = 48,76437,\quad z = 0,02051,\quad u = 0,00086$$
$$x = 3,886,\quad y = 48,71557,\quad z = 0,02053,\quad u = -0,03540.$$

Pour effectuer rapidement les calculs, il faut avoir soin de construire d'avance des tables contenant les produits du module M et du nombre 12,54 par les neuf premiers nombres. La racine est comprise entre 3,886 et 3,887.

Si l'on prend les différences des valeurs de la fonction, on voit que les différences secondes sont constantes.

x	u	Δ	Δ^2
3,886	−0,03540	3626	3
3,887	0,00086	3629	3
3,888	0,03715	3632	
3,889	0,07347		

Ainsi on pourra continuer le calcul comme s'il s'agissait d'une équation du second degré ; mais nous reviendrons plus tard à cette question.

199. Exemple XII. La détermination du mouvement d'une planète ou d'une comète autour du soleil se ramène à la résolution de l'équation

$$u - e \sin u = \zeta,$$

dans laquelle la lettre ζ désigne un angle donné ; u un angle cherché, e l'excentricité de l'orbite divisée par *sin* 1″.

Quand on obtient cette équation, ζ et u désignent des longueurs d'arcs, e l'excentricité : on la transforme en changeant les arcs en angles. Soit x le nombre qui mesure la longueur d'un arc, le rayon étant pris pour unité; on sait que, dans la construction des tables trigonométriques, la longueur de l'arc d'une seconde a été prise pour le sinus de l'angle d'une seconde; le quotient $x' = \frac{x}{\sin 1''}$ exprimera donc combien l'angle qui correspond à l'arc x contient de fois l'angle d'une seconde. Ainsi, pour transformer un arc en angle, l'angle de 1″ étant pris pour unité, il suffit de le diviser par *sin* 1″. Si donc on divise par *sin* 1″ tous les termes de l'équation

$$u - e \sin u = \zeta,$$

on obtient l'équation

$$u' - \frac{e}{\sin 1''} \sin u = \zeta'.$$

Quand il s'agit des planètes dont les orbites ont, en général, des excentricités très-petites, on peut résoudre l'équation par la méthode des approximations successives. Écrivons, en effet, l'équation sous la forme

$$u = \zeta + e \sin u.$$

En négligeant le second terme du second membre, on a une première valeur approchée

$$u_0 = \zeta.$$

Substituant cette valeur dans le second membre, on a une seconde valeur

$$u_1 = \zeta + e \sin \zeta$$

plus approchée que la première. Substituant cette seconde

valeur approchée dans le second membre, on a une troisième valeur encore plus approchée

$$u_2 = \zeta + e \sin u_1,$$

et ainsi de suite.

Prenons $\zeta = 62^\circ 28' 54'',6$ et l'excentricité 0,01679226 de l'orbite terrestre. On cherche d'abord

$$\log e = \frac{\log 0{,}01679226}{\log \sin 1''} = 3{,}5395343,$$

qui servira dans tout le cours du calcul. Calculons par logarithmes la première correction $e \sin \zeta$:

$$\begin{aligned} \log e &= 3{,}5395343 \\ \log \sin \zeta &= \bar{1}{,}9478572 \\ &\overline{\ 3{,}4873915} \\ e \sin \zeta = 0^\circ 51' 11'',8 ;\ u_1 &= 63^\circ 20' 6'',4. \end{aligned}$$

Calculons de même la seconde correction $e \sin u_1 - e \sin \zeta$:

$$\begin{aligned} \log e &= 3{,}5395343 \\ \log \sin u_1 &= \bar{1}{,}9511658 \\ \log 0^\circ 51' 35'', 3 \ldots &= 3{,}4907001 \\ e \sin u_1 - e \sin \zeta = 23'',6 ;\ u_2 &= 63^\circ 20' 29'',9. \end{aligned}$$

Calculons ensuite la troisième correction $e \sin u_2 - e \sin u_1$:

$$\begin{aligned} \log e &= 3{,}5395343 \\ \log \sin u_2 &= \bar{1}{,}9511906 \\ \log 0^\circ 51' 35'',5 \ldots &= 3{,}4907249 \\ e \sin u_2 - e \sin u_1 = 0'',2 ;\ u_3 &= 63^\circ 20' 30'',1. \end{aligned}$$

On voit que les corrections deviennent de plus en plus petites ; la correction suivante n'aurait pas d'influence sur

les dixièmes de seconde. Le calcul se fait très-rapidement, parce qu'on se sert toujours de la même partie des tables.

AYANT OBTENU, AVEC UN CERTAIN DEGRÉ D'APPROXIMATION, UNE RACINE D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE OU TRANSCENDANTE, EN APPROCHER DAVANTAGE PAR LA MÉTHODE DE NEWTON. — USAGE DES CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES POUR L'APPLICATION DE CETTE MÉTHODE.

Méthode par interpolation.

200. Quand on a obtenu une racine d'une équation avec un certain degré d'approximation, on peut en déduire aisément une valeur beaucoup plus approchée. La méthode la plus simple est celle d'interpolation. Soit $u = f(x)$ le premier membre de l'équation; on a trouvé deux valeurs x_0 et $x_0 + h$ qui comprennent une racine. Reprenons la formule (C) du n° 182

$$u = u_0 + \frac{z}{1}\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots..$$

obtenue en posant $\frac{x - x_0}{h} = z$. Nous cherchons la valeur de x ou de z qui annule la fonction; nous aurons donc pour déterminer z l'équation

$$(1) \qquad o = u_0 + z\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots..$$

que l'on résoudra par approximations successives. En effet, la raison h étant très-petite, les différences successives diminuent très-rapidement; si l'on néglige les différences d'un ordre supérieur au premier, on a l'équation du premier degré

$$u_0 + z\Delta u_0 = o,$$

d'où l'on déduit la valeur approchée

$$z = -\frac{u_0}{\Delta u_0}.$$

On peut mettre l'équation (1) mise sous la forme

$$z = -\frac{u_0}{\Delta u_0} - \left[\frac{z(z-1)}{1.2}\frac{\Delta^2 u_0}{\Delta u_0} + \dots\right];$$

On voit que l'erreur commise en prenant pour z la valeur approchée $-\frac{u_0}{\Delta u_0}$ est exprimée par la parenthèse; pour se rendre compte de l'erreur, on évaluera rapidement et par excès cette parenthèse.

Si l'on voulait une approximation plus grande, on remplacerait dans la parenthèse z par la première valeur approchée $-\frac{u_0}{\Delta u_0}$, ce qui donnerait une seconde valeur plus approchée que la précédente, et ainsi de suite.

Méthode de Newton.

201. Posons $x = x_0 + \alpha$, α étant plus petit que h, et développons $f(x_0 + \alpha)$ suivant la loi connue,

$$f(x_0+\alpha) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{\alpha}{1} + f''(x_0)\frac{\alpha^2}{1.2} + \dots;$$

nous aurons pour déterminer l'inconnue α l'équation

$$(2) \qquad 0 = f(x_0) + f'(x_0)\alpha + f''(x_0)\frac{\alpha^2}{1.2} + \dots$$

L'inconnue α étant une quantité très-petite, on pourra négliger les puissances supérieures à la première, et l'on aura l'équation du premier degré

$$f(x_0) + \alpha f'(x_0) = 0;$$

on en déduit la valeur approximative

$$\alpha = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

On peut écrire l'équation (2) sous la forme

$$\alpha = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \left[\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)}\alpha^2 + \frac{f'''(x_0)}{2.3f'(x_0)}\alpha^3 + \ldots\ldots\right].$$

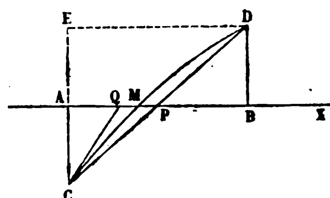
On voit que l'erreur commise en prenant la valeur approchée $-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ est exprimée par la parenthèse; pour se rendre compte de l'erreur, on évaluera rapidement et par excès cette parenthèse.

Les termes de la parenthèse diminuant rapidement, l'erreur commise est à peu près égale à $\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)}\alpha^2$; la quantité $\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)}$ est ordinairement plus petite que l'unité et par conséquent l'erreur commise moindre que α^2. Ainsi l'application de cette méthode double en général le nombre des chiffres décimaux exacts; par exemple, si h est moindre que 0,001, l'erreur commise sera en général moindre que 0,000001; on connaissait la racine avec trois chiffres décimaux exacts; on l'a maintenant avec six chiffres décimaux. On peut répéter l'opération plusieurs fois, en se servant de la valeur donnée par une première opération pour en déduire une valeur plus approchée, etc.

Emploi simultané des deux méthodes.

202. Il est très-avantageux d'employer simultanément les deux méthodes, de manière à ce que l'une donne un résultat trop petit, l'autre un résultat trop grand; la valeur

de la racine étant alors comprise entre les deux, on
juste l'approximation sur laquelle on peut compter.
résentons par deux ordonnées AC et BD les valeurs de
contraires du polynôme pour $x = x_0$ et $x = x_0 + h$,
;ons la courbe du point C au point D. Cette courbe
l'axe OX en un point M qu'il s'agit de déterminer.
allons faire voir que la méthode d'interpolation par
s proportionnelles consiste à remplacer l'arc de
e CMD par la corde CD; tandis que la méthode de Newton revient à mener la tangente CQ au point C.



En effet, par le point D traçons une parallèle DE à l'axe OX; on a
BD + AC = CE; les triangles semblables ACP, CED,
nt

$$\frac{AP}{AB} = \frac{CA}{CE},$$

$$z = \frac{AP}{h} = -\frac{u_0}{\Delta u_0}.$$

quantité $\frac{AP}{h}$ est ce que nous avons appelé z.

utre part, on sait que la tangente trigonométrique de
e que fait la tangente à la courbe avec l'axe OX est
à $f'(x)$. Le triangle rectangle CAQ donne

$$AQ = AC.\cot CQA = \frac{AC}{\tang CQA};$$

lonc

$$AQ = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Si nous appelons z' le rapport $\frac{AQ}{h}$, nous aurons

$$z' = \frac{AQ}{h} = -\frac{u_0}{hf'(x_0)}.$$

Ceci revient à prendre pour unité l'intervalle h.

On voit sur la figure que le point M est situé entre les deux points P et Q, et par conséquent que la vraie valeur OM de la racine est comprise entre les deux valeurs approchées OP et OQ. En d'autres termes, l'une des corrections est trop grande, l'autre trop petite.

203. Appliquons à l'équation du troisième degré

$$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0$$

dont nous avons calculé la plus petite racine positive à un millième près (nº 187). Supposons d'abord que nous n'ayons pas été plus loin que les dixièmes par les différences ; la racine est comprise entre 0,3 et 0,4.

Par la première méthode, celle des parties proportionnelles, nous avons la correction

$$z = \frac{0,197}{1,453} = 0,1355 \ldots\ldots;$$

l'erreur commise est donnée par la formule

$$\begin{aligned} & -\left[\frac{z(z-1)}{1.2}\frac{\Delta^2 u_0}{\Delta u_0} + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u_0}{\Delta u_0}\right] \\ = & -\left[-\frac{0,084}{1,453}\frac{z(z-1)}{1.2} - \frac{0,006}{1,453}\frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}\right] \\ = & -\left[\frac{42z(1-z)}{1453} - \frac{z(1-z)(2-z)}{1453}\right]. \end{aligned}$$

L'erreur est négative et moindre en valeur absolue que

$$\frac{42z(1-z)}{1453}.$$

Le produit $z(1-z)$, ayant sa valeur maximum pour $z=\frac{1}{2}$, est toujours moindre que $\frac{1}{4}$; dans le cas actuel, il est moindre que z ou que 0,14; la valeur absolue de l'erreur est donc plus petite que

$$\frac{42\times 0,14}{1453}<0,0040...$$

Ainsi la valeur de z est comprise entre 0,131 et 0,136. Comme nous avons pris dans le calcul de z le dixième pour unité, la correction sera 0,013, et la première racine 0,313 avec *trois* chiffres décimaux exacts, par défaut.

La méthode de Newton nous donne la correction

$$z'=\frac{0,197}{1,493}=0,1319....$$

Nous remarquons que, lorsqu'il s'agit d'une équation du troisième degré, le second diviseur $hf'(x_0)$ se déduit très-facilement du tableau des différences, comme nous l'avons fait remarquer au n° 185; de la différence première — 1453, il suffit de retrancher la moitié de la différence seconde antérieure 0,078 et le sixième de la différence troisième 0,006, ce qui fait — 1,493. L'erreur commise est exprimée par la formule

$$-\left[\frac{f''(x_0)}{2hf'(x_0)}\alpha^2+\frac{f'''(x_0)}{6hf'(x_0)}\alpha^3\right]=\frac{3x_0+3}{1,493}\alpha^2+\frac{\alpha^3}{1,493}$$
$$=\frac{(3,9+\alpha)\alpha^2}{1,493}.$$

Quand on prend le dixième pour unité, la valeur α étant moindre que 0,02, l'erreur est positive et moindre que 0,0011. Ainsi la valeur de z' est comprise entre 0,1319 et

0,1330, et l'on a la racine 0,313 par défaut à un demi-millième près.

Voilà comment on peut évaluer l'approximation de la correction calculée par l'une ou l'autre des deux méthodes. Mais quand on applique les deux méthodes à la fois, cette évaluation de l'erreur devient inutile; la comparaison des deux résultats, dont l'un est trop fort, l'autre trop faible, indique assez l'approximation.

Si l'on prend la moyenne

$$\frac{z+z'}{2} = 0{,}1337\ldots\ldots,$$

des deux résultats approchés, il est aisé de voir que l'erreur commise est moindre que la demi-différence

$$\frac{z-z'}{2} = 0{,}0018\ldots\ldots$$

En effet, si l'on appelle Z la valeur exacte de la correction, ε et ε' les erreurs, on a

$$Z = z - \varepsilon,$$
$$Z = z' + \varepsilon';$$

d'où

$$Z = \frac{z+z'}{2} + \frac{\varepsilon'-\varepsilon}{2}, \qquad \frac{z-z'}{2} = \frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}.$$

Ainsi la différence entre la vraie valeur Z et la moyenne $\frac{z+z'}{2}$ est moindre que $\frac{z-z'}{2}$. Nous adopterons ainsi la valeur

$$Z = 0{,}13$$

approchée par défaut. Le dixième ayant été pris pour unité, la correction est donc 0,013 et nous avons la première racine 0,313 avec *trois* chiffres décimaux exacts, par défaut.

Nous avons poussé le calcul de cette première racine jus-

qu'aux millièmes par les différences. Si l'on applique alors les deux modes de correction, on trouve

$$z = \frac{3571297}{14824153} = 0,24097\ldots\ldots$$

$$z' = \frac{3571297}{14828093} = 0,24085\ldots\ldots$$

on prendra

$$Z = 0,2409,$$

ce qui donne la racine 0,3132409 avec sept décimales exactes.

204. Nous avons supposé dans ce qui précède que x_0 est une valeur de la racine approchée par défaut; les mêmes raisonnements et les mêmes formules s'appliquent au cas où elle est approchée par excès; il suffit de rendre h négative. Pour effectuer la correction, on partira de la valeur que l'on présume être la plus approchée.

Appliquons à l'équation du troisième degré

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

dont nous avons calculé les deux racines positives à un centième près (nº 188). Pour la première, nous partirons de la limite supérieure 1,36 faisant $h = -0,01$; nous aurons

$$z = -\frac{4544}{14919} = -0,303\ldots\ldots$$

$$z' = -\frac{4544}{14512} = -0,313\ldots\ldots$$

on prendra $Z = -0,31$, ce qui donne la première racine 1,3569 avec quatre chiffres décimaux exacts. Pour la seconde, on partira au contraire de la limite inférieure 1,69.

Appliquons à l'équation du quatrième degré

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0,$$

dont nous avons calculé les racines positives à un dixième près (n° 194). Pour la première, nous partirons de la limite inférieure 1,4. La méthode d'interpolation nous donne la correction

$$z = \frac{0,4016}{2,4641} = 0,163\ldots\ldots$$

L'erreur commise est

$$\frac{z(1-z)}{2}\,\frac{3198}{24641} + \frac{z(1-z)(2-z)}{6}\,\frac{48}{24641}$$
$$-\frac{z(1-z)(2-z)(3-z)}{24}\,\frac{24}{24641};$$

en négligeant le dernier terme qui est négatif, remplaçant le facteur z par 0,2, et les facteurs $1-z$ et $2-z$ par 1 et 2, on voit qu'elle est moindre que

$$\frac{323}{26461} < 0,013.$$

Ainsi la valeur de z est comprise entre 0,163 et 0,176. On prendra 0,17, ce qui donne la racine $x = 1,417$ à moins d'un millième.

Par la méthode de Newton, on eût trouvé

$$z' = \frac{0,4016}{2,3024} = 0,174\ldots\ldots$$

En prenant la moyenne, on a

$$Z = 0,17; \quad x = 1,417.$$

205. Nous avons calculé la racine de l'équation transcendante

$$e^x - e^{-x} - 12,54x = 0.$$

à un millième près (n° 198), et nous avons trouvé qu'elle est comprise entre 3,886 et 3,887, mais plus rapprochée

de ce dernier nombre que du premier. Nous avons vu que la différence seconde est constante au degré d'approximation où l'on peut aller avec les tables ordinaires de logarithmes. On aura donc, pour effectuer la correction, l'équation du second degré

$$0 = u_0 + z\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{2}\Delta^2 u_0,$$

d'où

$$z = -\frac{u_0}{\Delta u_0} - \frac{z(z-1)}{2}\frac{\Delta^2 u_0}{\Delta u_0}.$$

Une première valeur approchée de z est

$$z = \frac{3540}{3626} = 0,97628\ldots.$$

La correction $\frac{z(z-1)}{2}\frac{\Delta^2 u_0}{\Delta u_0}$ est moindre que $\frac{1}{10^5}$, ainsi on aura la racine avec sept décimales exactes

$$x = 3,8869763.$$

Exercices :

Question I. Partager un hémisphère en deux parties égales par un plan parallèle à la base de l'hémisphère. On calculera l'inconnue à moins d'un millième en prenant le rayon de la sphère pour unité.

Question II. Déterminer les dimensions d'un cylindre circulaire droit dont on connaît la surface totale et le volume. — On fera une application numérique.

Question III. Déterminer les arêtes d'un parallélipipède rectangle, connaissant la diagonale, la surface totale et le volume.

QUESTION IV. Déterminer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la somme des deux côtés de l'angle droit, et le volume qu'engendre le triangle en tournant autour de l'hypoténuse.

QUESTION V. Calculer à moins d'un millième près la plus petite racine positive de l'équation $x \tang x = 1$.

QUESTION VI. On a trouvé, pour l'écoulement des eaux dans les tuyaux de conduite, la formule empirique

$$Q = 21{,}045 \sqrt{D^5 j} - 0{,}0196 D^2,$$

dans laquelle D représente le diamètre du tuyau en mètre, j la pente par mètre, Q la dépense par seconde en mètres cubes. Calculer le diamètre qu'il faut donner à un tuyau pour que sous une pente donnée il fournisse une quantité d'eau déterminée.—On emploiera la méthode des approximations successives à cause de la vitesse du second coefficient.

CHAPITRE IX.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES.

TOUTE FRACTION RATIONNELLE $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ EST DÉCOMPOSABLE EN UNE PARTIE ENTIÈRE ET EN DIVERSES FRACTIONS SIMPLES. — LA DÉCOMPOSITION NE PEUT SE FAIRE QUE D'UNE SEULE MANIÈRE. — MOYENS DE L'EFFECTUER QUAND ON CONNAÎT LES FACTEURS BINOMES QUI DIVISENT LE DÉNOMINATEUR $f(x)$.

206. On appelle *fraction rationnelle* une fraction algébrique dont les deux termes sont des polynômes entiers d'une même lettre x. Soit $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ une fraction de cette forme. Nous pouvons toujours supposer cette fraction irréductible; car, si les deux polynômes avaient des facteurs binômes communs, on les supprimerait. Lorsque le numérateur est d'un degré plus élevé que le dénominateur, on effectue la division en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, ce qui donne un quotient entier et une fraction ayant son numérateur d'un degré moins élevé que

le dénominateur. Laissant de côté cette partie entière, nous avons à considérer une fraction irréductible $\frac{F(x)}{f(x)}$ dont le numérateur est d'un degré moins élevé que le dénominateur. Nous désignerons par m le degré du dénominateur, le numérateur étant au plus du degré $m-1$.

Cas des racines inégales.

207. Supposons d'abord que l'équation $f(x)=0$ n'ait pas de racines égales. J'appelle $a, b, c, \ldots\ldots h, k,$ les m racines de cette équation, et je pose

$$f(x)=(x-a)f_1(x).$$

Je remplace x par $a+(x-a)$, et, regardant $x-a$ comme un accroissement, je développe les deux polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ suivant les puissances croissantes de $x-a$,

$$F(x)=F(a+\overline{x-a})=F(a)+F'(a)\frac{x-a}{1}+\ldots.$$

$$f_1(x)=f_1(a+\overline{x-a})=f_1(a)+f'_1(a)\frac{x-a}{1}+\ldots.$$

Je divise le premier polynôme par le second, en ordonnant le quotient par rapport aux puissances croissantes de $x-a$; le premier terme du quotient est $\frac{F(a)}{f_1(a)}$; j'appelle A ce premier terme; en multipliant le diviseur par A et retranchant le produit du dividende, on a un reste qui ne contient plus de terme constant; si l'on met $x-a$ en facteur commun, ce reste peut être représenté par $(x-a)F_1(x)$. Du dividende, qui est au plus du degré $m-1$, on retranche le produit $Af_1(x)$ qui est du degré $m-1$, et l'on

met $x-a$ en facteur, le polynôme $F_1(x)$ est donc au plus du degré $m-2$. J'arrête la division à ce premier terme; le dividende étant égal au produit du diviseur par le quotient, plus le reste, on a

$$F(x) = Af_1(x) + (x-a)F_1(x). \tag{1}$$

En divisant les deux membres par $f(x)$ ou par $(x-a)\,f_1(x)$, il vient

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{F_1(x)}{f_1(x)}.$$

Ainsi la fraction proposée est égale à une première raction simple $\frac{A}{x-a}$, plus une fraction rationnelle $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$ de même forme que la première, mais d'un degré moins élevé. Le dénominateur $f_1(x)$ est en effet du degré $m-1$, le numérateur $F_1(x)$ au plus du degré $m-2$. Cette nouvelle fraction est d'ailleurs irréductible comme la proposée; car si les deux termes avaient un facteur binôme commun, ce ne pourrait être que l'un des facteurs de $f_1(x)$, par exemple $x-b$; ce facteur, divisant les deux parties qui composent le second membre de l'équation (1), diviserait leur somme $F(x)$, ce qui est impossible, puisqu'on a supposé qu'aucun des facteurs de $f(x)$ ne divise $F(x)$.

Les mêmes raisonnements s'appliquent à la fraction $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$. Si l'on pose $f_1(x) = (x-b)\,f_2(x)$, on aura

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \frac{B}{x-b} + \frac{F_2(x)}{f_2(x)};$$

la nouvelle fraction $\frac{F_2(x)}{f_2(x)}$ est aussi irréductible, son dé-

nominateur du degré $m-2$, son numérateur au plus du degré $m-3$.

De même

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)}=\frac{C}{x-c}+\frac{F_3(x)}{f_3(x)};$$

en continuant de cette manière, on arrivera enfin à une fraction du premier degré

$$\frac{F_{m-1}(x)}{f_{m-1}(x)}=\frac{K}{x-k}.$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités, les fractions intermédiaires disparaissent, et l'on a

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{K}{x-k}.$$

Ainsi *la fraction rationnelle est décomposable en une somme de fractions simples, ayant respectivement pour dénominateurs les facteurs simples qui composent le dénominateur de la fraction proposée et pour numérateurs des constantes.*

208. Je dis maintenant que la fraction proposée *n'est décomposable qu'en un seul système de fractions simples.* On démontre, en effet, que deux systèmes de fractions simples

$$\frac{A}{x-a}+\frac{A}{x-b}+\ldots+\frac{K}{x-k},$$
$$\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\ldots+\frac{K'}{x-k'},$$

égaux pour toutes les valeurs de x, sont identiques. Multiplions par $x-a$, il vient

$$A+(x-a)\left[\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots\right]$$
$$=(x-a)\left[\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\ldots\right].$$

Donnons maintenant à x la valeur particulière a; le premier membre se réduit à A; si aucun des dénominateurs des fractions du second système n'était égal à $x-a$, le second membre s'évanouirait quand on fait $x=a$; il faut donc que l'un de ces dénominateurs soit égal à $x-a$. Supposons, par exemple, $a'=a$; alors on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}+(x-a)\left[\frac{\mathrm{B}}{x-b}+\frac{\mathrm{C}}{x-c}+\ldots..\right]\\ &=\mathrm{A}'+(x-a)\left[\frac{\mathrm{B}'}{x-b'}+\frac{\mathrm{C}'}{x-c'}+\ldots..\right].\end{aligned}$$

et si l'on fait $x=a$, on en déduit $\mathrm{A}'=\mathrm{A}$. Ainsi la fraction $\frac{\mathrm{A}}{x-a}$ du premier système fait partie du second. Supprimons ces deux fractions égales, il reste deux systèmes égaux

$$\frac{\mathrm{B}}{x-b}+\frac{\mathrm{C}}{x-c}+\ldots..=\frac{\mathrm{B}'}{x-b'}+\frac{\mathrm{C}'}{x-c'}+\ldots\ldots$$

On démontrerait de même que la fraction $\frac{\mathrm{B}}{x-b}$ du premier appartient au second, et ainsi de suite. Alors les deux systèmes sont identiques.

209. Calcul des numérateurs. Nous avons trouvé

$$\mathrm{A}=\frac{\mathrm{F}(a)}{f_1(a)}.$$

Le premier numérateur A est la valeur de la fraction

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{\left(\dfrac{f(x)}{x-a}\right)}$$

quand on y fait $x=a$.

De même le second numérateur B est la valeur de la fraction

$$\frac{F(x)}{\left(\frac{f(x)}{x-b}\right)},$$

quand on y fait $x=b$, etc.

On peut aussi calculer ces constantes au moyen de la dérivée de la fonction $f(x)$. En effet, nous avons posé

$$f(x)=(x-a)f_1(x);$$

si l'on prend les dérivées des deux membres, il vient

$$f'(x)=f_1(x)+(x-a)f_1'(x),$$

et, en faisant $x=a$,

$$f'(a)=f_1(a).$$

On en déduit

$$A=\frac{F(a)}{f'(a)}.$$

On aura de même

$$B=\frac{F(b)}{f'(b)},\quad C=\frac{F(c)}{f'(c)}\ldots\ldots$$

Ainsi les *numérateurs des fractions simples sont les diverses valeurs que prend la fraction* $\frac{F(x)}{f'(x)}$, *quand on y remplace successivement* x *par chacune des racines* a, b, ... k *de l'équation* $f(x)=0$.

Exemples.

1° Soit à décomposer la fraction

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{2x^3+5x^2-6}{x^4+2x^3-x^2-2x}.$$

En résolvant l'équation

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0,$$

on obtient les quatre racines simples $0, 1, -1, -2$. Ainsi la fraction rationnelle se décomposera en quatre fractions simples de la forme

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x+2}.$$

Pour calculer les numérateurs, nous nous servirons de la dérivée

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x - 2,$$

ce qui donne

$$A = \frac{F(0)}{f'(0)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$B = \frac{F(1)}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

$$C = \frac{F(-1)}{f'(-1)} = \frac{-3}{2}$$

$$D = \frac{F(-2)}{f'(-2)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

Nous avons donc

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 6}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x} = \frac{3}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-1} - \frac{\frac{3}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x+2}.$$

2° Soit à décomposer la fraction

$$\frac{x^2 + 1}{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

La fraction proposée se décomposera de la manière suivante :

$$\frac{x^2 + 1}{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-3}.$$

On peut déterminer les constantes immédiatement et sans l'aide d'aucune formule par la méthode des *coefficients indéterminés*. Si l'on multiplie par le dénominateur, l'égalité précédente devient

$$x^2+1=A(x-1)(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-2)(x-3)$$
$$+C(x+1)(x-1)(x-3)+D(x+1)(x-1)(x-2).$$

Cette égalité doit avoir lieu, quelle que soit la valeur de x. Faisons x successivement égal à chacune des racines simples $-1, 1, 2, 3$, tous les termes du second membre s'évanouissent, excepté un, et l'on a les relations

$$2=-24A,\quad 2=4B,\quad 5=-3C,\quad 10=8D;$$

d'où l'on déduit les valeurs constantes

$$A=-\frac{1}{12},\quad B=\frac{1}{2},\quad C=-\frac{5}{3},\quad D=\frac{5}{4}.$$

Cas des racines égales.

210. Supposons que a soit une racine de l'équation $f(x)=0$ d'un ordre n de multiplicité. Nous poserons

$$f(x)=(x-a)^n f_1(x),$$

et après avoir développé comme précédemment les deux polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ suivant les puissances croissantes de $x-a$,

$$F(x)=F(a+x-a)=F(a)+F'(a)\frac{x-a}{1}+\ldots\ldots,$$

$$f_1(x)=f_1(a+x-a)=f_1(a)+f_1'(a)\frac{x-a}{1}+\ldots\ldots,$$

nous effectuerons la division du premier par le second,

ordonnant le quotient suivant les puissances croissantes de $x-a$ et poussant l'opération jusqu'au terme du degré $n-1$; représentons ce quotient par

$$A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots\ldots + A_{n-1}(x-a)^{n-1},$$

le reste de la division contenant à tous ses termes le facteur $(x-a)^n$ peut être mis sous la forme $(x-a)^n F_1(x)$. On a ainsi

$$F(x) = [A_0 + A_1(x-a) \ldots\ldots + A_{n-1}(x-a)^{n-1}] f_1(x) + (x-a)^n F_1(x).$$

Le diviseur étant du degré $m-n$, et le quotient du degré $n-1$, le produit du diviseur par le quotient est du degré $m-1$, et comme le dividende est au plus du degré $m-1$, la différence ou le reste de la division sera au plus du degré $m-1$; puisqu'on a mis $(x-a)^n$ en facteur, il en résulte que le polynôme $F_1(x)$ est au plus du degré $m-n-1$. Il est évident, d'ailleurs, que les deux polynômes $f_1(x)$ et $F_1(x)$ sont premiers entre eux; car s'ils avaient un facteur commun, ce facteur diviserait $f(x)$ et $F(x)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Divisons maintenant par $f(x)$ ou $(x-a)^n f_1(x)$ les deux membres de l'égalité précédente, il vient

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{F_1(x)}{f_1(x)}.$$

Ainsi le facteur multiple $(x-a)^n$ donne lieu à une série de n fractions simples, et nous avons encore à décomposer la fraction irréductible $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$, dont le dénominateur est du degré $m-n$, le numérateur au plus du degré $m-n-1$.

Supposons que l'équation $f(x)=0$ contienne une seconde racine b d'un degré p de multiplicité; nous poserons

$f_1(x) = (x-b)^p f_2(x)$, et nous aurons de même

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \dots + \frac{B_{p-1}}{x-b} + \frac{F_2(x)}{f_2(x)}.$$

S'il y a une troisième racine c d'ordre q, on aura encore

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)} = \frac{C_0}{(x-c)^q} + \frac{C_1}{(x-c)^{q-1}} + \dots + \frac{C_{q-1}}{x-c} + \frac{F_3(x)}{f_3(x)}.$$

S'il n'y a pas d'autre racine multiple, le polynôme $f_3(x)$ ne contenant plus que des facteurs simples, on aura, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$\frac{F_3(x)}{f_3(x)} = \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e} + \dots + \frac{K}{x-k}.$$

En ajoutant toutes ces égalités, on trouve enfin

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = {} & \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x-a} \\ & + \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \dots + \frac{B_{p-1}}{x-b} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{D}{x-d} + \dots\dots\dots + \frac{K}{x-k}.\end{aligned}$$

A chaque racine multiple correspond un groupe de fractions simples. La première fraction de chaque groupe existe nécessairement, mais les autres peuvent manquer; en effet, quand on effectue la division des polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ ordonnés comme nous l'avons dit, les premiers termes $F(a)$ et $f_1(a)$ ne sont pas nuls, et par conséquent le premier terme $A_0 = \dfrac{F(a)}{f_1(a)}$ du quotient n'est ni nul ni infini; mais parmi les termes suivants, quelques-uns peuvent avoir des coefficients nuls.

211. Je dis maintenant que *la fraction proposée n'est décomposable qu'en un seul système de fractions simples.* Soient

$$\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}\cdots\cdots+\frac{B_0}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot,$$
$$\frac{A'_0}{(x-a')^{n'}}+\frac{A'_1}{(x-a')^{n'-1}}\cdots\cdots+\frac{B'_0}{(x-b')^{p'}}+\frac{B'_1}{(x-b')^{p'-1}}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot,$$

deux systèmes égaux entre eux, quelle que soit la valeur de x. Multiplions les deux expressions par $(x-a)^n$ et faisons $x=a$; la première se réduit à A_0; si aucune des fractions du second système n'avait pour dénominateur une puissance de $x-a$, le second membre s'évanouirait quand on fait $x=a$; il faut donc que certaines fractions du second système aient pour dénominateurs des puissances de $x-a$. Soit $a'=a$; je dis que $n'=n$; car si ces deux exposants différaient, si, par exemple, n était plus grand que n', en multipliant par $(x-a)^n$, on verrait que pour $x=a$ le premier membre se réduirait à A_0, tandis que le second s'évanouirait. On a donc aussi $n'=n$. Mais alors l'égalité devient, après la multiplication par $(x-a)^n$,

$$A_0+A_1(x-a)+\cdots\cdots+(x-a)^n\left[\frac{B_0}{(x-b)^p}+\cdots\cdots\right]$$
$$=A'_0+A'_1(x-a)+\cdots\cdots+(x-a)^n\left[\frac{B'_0}{(x-b')^{p'}}+\cdots\cdots\right];$$

si l'on fait $x=a$, on en déduit $A_0=A'_0$. Ainsi la première fraction du premier système se retrouve dans le second. En supprimant ces deux fractions égales et recommençant le même raisonnement, on verrait que la seconde s'y trouve également, et ainsi de suite. Donc les deux systèmes sont identiques.

Exemple.

212. Soit à décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{f(x)}=\frac{4x^3-5x+2}{x^6-x^5-x^4+x^3}.$$

Le dénominateur

$$f(x)=x^3(x-1)^2(x+1)$$

contenant un facteur triple, un facteur double et un facteur simple, la fraction proposée se développera en fractions simples de la forme suivante

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{f(x)}=\frac{\mathrm{A}_0}{x^3}+\frac{\mathrm{A}_1}{x^2}+\frac{\mathrm{A}_2}{x}+\frac{\mathrm{B}_0}{(x-1)^2}+\frac{\mathrm{B}_1}{x-1}+\frac{\mathrm{C}}{x+1}.$$

Calculons les trois constantes qui se rapportent au facteur triple x. Nous ordonnons par rapport aux puissances croissantes de x,

$$\mathrm{F}(x)=2-5x+4x^3,$$
$$f_1(x)=(x-1)^2(x+1)=1-x-x^2+x^3,$$

et nous effectuons la division jusqu'à ce que nous arrivions au terme du second degré, en remarquant que dans ce calcul il est inutile d'écrire les termes d'un degré supérieur au second, ce qui abrége l'opération,

$$\begin{array}{r|l} 2-5x & 1-x-x^2 \\ \cline{2-2} -3x+2x^2 & 2-3x-x^2. \\ -x^2 & \end{array}$$

Puisque le quotient a été représenté par $\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1x+\mathrm{A}_2x^2$, on a

$$\mathrm{A}_0=2,\qquad \mathrm{A}_1=-3,\qquad \mathrm{A}_2=-1.$$

Calculons maintenant les coefficients qui se rapportent au facteur double $x-1$. On peut supposer que l'on commence la décomposition par ce facteur. Nous développerons jusqu'au premier degré en négligeant les termes suivants

$$F(x)=F(1+x-1)=F(1)+F'(1)(x-1)+\ldots\ldots=1+7(x-1)+\ldots\ldots$$
$$f_1(x)=x^3(x+1)=x^4+x^3=f_1(1)+f'_1(1)(x-1)+\ldots=2+7(x-1)+\ldots\ldots$$

et nous effectuerons la division

$$\begin{array}{l|l} 1+7(x-1) & 2+7(x-1) \\ \hline +\frac{7}{2}(x-1) & \frac{1}{2}+\frac{7}{4}(x-1). \end{array}$$

Ce quotient a été représenté par $B_0+B_1(x-1)$; on a donc

$$B_0=\frac{1}{2}, \qquad B_1=\frac{7}{4}.$$

Quant au coefficient C qui se rapporte au facteur simple $(x+1)$, on l'obtient par la règle ordinaire

$$C=\frac{F(-1)}{f'(-1)}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}.$$

On a ainsi

$$\frac{4x^3-5x+2}{x^6-x^5-x^4+x^3}=\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{7}{4}}{x-1}-\frac{\frac{3}{4}}{x+1}.$$

213. On peut employer aussi la méthode des coefficients indéterminés. On a posé

$$\frac{4x^3-5x+2}{x^6-x^5-x^4+x^3}=\frac{A_0}{x^3}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B_0}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, cette égalité devient

$$4x^3 - 5x + 2 = (A_0 + A_1x + A_2x^2)(x-1)^2(x+1) + [B_0 + B_1(x-1)]x^2(x+1) + Cx^2(x-1)^2.$$

En donnant successivement à x les valeurs $0,\ 1,\ -1$, on a

$$2 = A_0, \qquad 1 = 2B_0, \qquad 3 = -4C,$$

d'où

$$A_0 = 2, \qquad B_0 = \frac{1}{2}, \qquad C = -\frac{3}{4}.$$

Prenons les dérivées des deux membres de l'égalité précédente, ce qui donne

$$12x^2 - 5 = (A_1 + 2A_2x)(x-1)^2(x+1) + (A_0 + A_1x + A_2x^2)[2(x-1)(x+1) + (x-$$
$$+ B_1x^2(x+1) + [B_0 + B_1(x-1)][3x^2(x+1) + x^2]$$
$$+ 3Cx^2(x-1)^2 + 2Cx^2(x-1),$$

et dans cette dernière égalité, faisons $x = 0$ et $x = 1$, nous aurons

$$-5 = A_1 - A_0, \qquad 7 = 2B_1 + 7B_0,$$

d'où

$$A_1 = -3, \qquad B_1 = \frac{7}{4}.$$

Il ne reste plus que la constante A_2 à déterminer ; pour cela nous prendrons encore une fois la dérivée et nous y ferons $x = 0$. Il suffit d'écrire les termes qui ne contiennent pas le facteur x,

$$24x = 2A_2(x-1)^2(x+1) + 2A_1[2(x-1)(x+1) + (x-1)^2]$$
$$+ A_0[2(x+1) + 4(x-1)] + \ldots\ldots$$

Si l'on fait $x = 0$, il vient

$$0 = 2A_2 - 2A_1 - 2A_0,$$

d'où

$$A_2 = -1.$$

Cas des racines imaginaires.

214. La décomposition de la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ est vraie d'une manière générale, quelles que soient les racines de l'équation $f(x)=0$, réelles ou imaginaires. Supposons que les deux polynômes qui composent la fraction proposée aient tous leurs coefficients réels ; dans ce cas, si l'équation admet une racine imaginaire $\alpha+\beta i$, elle admettra la racine conjuguée $\alpha-\beta i$. A ces deux racines correspondent dans le développement des fractions simples de la forme

$$\frac{A+Bi}{x-\alpha-\beta i}, \qquad \frac{A-Bi}{x-\alpha+\beta i};$$

les numérateurs de ces deux fractions sont des quantités imaginaires conjuguées; car la seconde se déduit évidemment de la première par le changement du signe de i. Si l'on veut éviter les imaginaires dans la décomposition, il suffit d'ajouter ces deux fractions simples, ce qui donne

$$\frac{A+Bi}{x-\alpha-\beta i}+\frac{A-Bi}{x-\alpha+\beta i}=\frac{2A(x-\alpha)-2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Ainsi, à un couple de racines simples imaginaires conjuguées correspond une fraction réelle de la forme

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

ayant son dénominateur du second degré et son numérateur du premier degré.

215. Nous avons supposé dans ce qui précède que les racines imaginaires conjuguées sont simples; supposons maintenant qu'elles soient d'un degré n de multiplicité, et, pour abréger, représentons par x^2+px+q le produit $(x-\alpha)^2+\beta^2$ des deux facteurs binômes du premier degré. Nous allons démontrer que la partie qui, dans le développement, correspond à ces deux racines imaginaires conjuguées d'ordre n, peut être ramenée à une somme de n fractions de la forme

$$\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^n}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{n-1}}\cdots\cdots+\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{x^2+px+q},$$

dont les numérateurs sont réels et du premier degré.

Posons $f(x)=(x^2+px+q)^n f_1(x)$. On peut disposer des deux constantes M_0 et N_0 de manière que le polynôme

$$(2)\qquad F(x)-(M_0x+N_0)f_1(x)$$

soit divisible par x^2+px+q. Il suffit pour cela que ce polynôme s'annule pour $x=\alpha+\beta i$ et pour $x=\alpha-\beta i$; si nous remplaçons x par chacune de ces deux valeurs et si nous appelons $A\pm Bi$ et $C\pm Di$ les valeurs correspondantes des fonctions $F(x)$ et $f_1(x)$, nous obtiendrons les deux relations

$$(A+Bi)-[M_0(\alpha+\beta i)+N_0](C+Di)=0,$$
$$(A-Bi)-[M_0(\alpha-\beta i)+N_0](C-Di)=0.$$

On en déduit, en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire,

$$(\beta D-\alpha C)M_0-CN_0=-A,$$
$$(\beta C+\alpha D)M_0+DN_0=B.$$

Ces équations entre M_0 et N_0 sont du premier degré; le

dénominateur commun des inconnues $\beta(C^2+D^2)$ n'est pas nul; car si β était nulle, les racines ne seraient pas imaginaires; si C^2+D^2 était nulle, le polynôme $f_1(x)$ contiendrait encore le facteur x^2+px+q. On trouve ainsi pour M_0 et N_0 des valeurs réelles finies et déterminées.

Le polynôme (2) devenant de cette manière divisible par x^2+px+q, si l'on appelle $\varphi(x)$ le quotient entier, on aura

$$F(x)-(M_0x+N_0)f_1(x)=(x^2+px+q)\varphi(x),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^n}+\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)}.$$

On aurait de même

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{n-2}f_1(x)},$$

et ainsi de suite.

Exemples :

216. Décomposer la fraction

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{x^3+5}{x^4+x^3+x^2+x}=\frac{x^3+5}{x(x+1)(x^2+1)}.$$

On a deux racines réelles 0 et -1 et deux racines imaginaires $+i$ et $-i$. Si l'on ne veut pas de quantités imaginaires dans le développement, on écrira

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Pour calculer les numérateurs, on emploiera de préférence

dans ce cas la méthode des coefficients indéterminés. Si l'on multiplie par $f(x)$, l'égalité précédente devient

$$x^3 + 5 = A(x+1)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x(x+1).$$

Si l'on y fait successivement $x = 0$ et $x = -1$, on trouve

$$A = 5, \qquad B = -2.$$

Il reste à déterminer les deux constantes C et D qui correspondent aux racines imaginaires. On égalera les coefficients de x^3 et de x^2 dans les deux membres de l'égalité, ce qui donne les relations

$$1 = A + B + C;$$
$$0 = A + C + D;$$

d'où l'on déduit

$$C = -2, \qquad D = -3.$$

Ainsi

$$\frac{x^3+5}{x^4+x^3+x^2+x} = \frac{5}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2x+3}{x^2+1}.$$

217. Décomposer la fraction

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}.$$

On a une racine simple 0 et deux racines imaginaires conjuguées doubles $\pm i$. La fraction se décomposera donc sous la forme suivante

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{B'x+C'}{x^2+1}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, on a l'égalité

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (B'x+C')\,x(x^2+1).$$

Faisant $x = 0$, il vient $A = 1$. Égalant ensuite dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient les relations

$$A + B' = 0, \quad C' = 0, \quad 2A + B + B' = 0, \quad C + C' = 0;$$

d'où l'on déduit

$$B' = -1, \quad C' = 0, \quad B = -1, \quad C = 0.$$

On a ainsi

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}.$$

APPENDICE.

NOTE A. *Résolution de deux équations du second degré à deux inconnues* (*).

218. Soient

$$(1)\qquad ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$
$$(2)\qquad a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0,$$

deux équations du second degré à deux inconnues. Si après avoir multiplié la première par c', la seconde par c, on les retranche l'une de l'autre, les termes en y^2 disparaissent, et l'on a une équation du premier degré en y, d'où l'on déduit une valeur de la forme

$$y=mx^2+nx+p,$$

qui substituée dans l'une des deux équations proposées, conduit à une équation du quatrième degré en x. A chacune des valeurs de x correspond une valeur de y ; ainsi les deux équations proposées admettent en général quatre systèmes de solutions.

Mais on peut ramener la question à la résolution d'une équation du troisième degré. En effet, si l'on ajoute les deux équations, après avoir multiplié l'une d'elles par une quantité arbitraire λ, on obtient une troisième équation

$$(3)\qquad (a+\lambda a')x^2+(b+\lambda b')xy+(c+\lambda c')y^2+(d+\lambda d')x$$
$$+(e+\lambda e')y+(f+\lambda f')=0,$$

(*) Cette question fait partie du programme de géométrie analytique.

qui peut remplacer l'une des deux équations proposées. Or on peut disposer de l'indéterminée λ de manière que cette nouvelle équation se décompose en deux équations du premier degré.

Représentons pour abréger l'équation (3) par

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

et, après l'avoir ordonnée de cette manière,

$$Cy^2 + (Bx + E)y + (Ax^2 + Dx + F) = 0,$$

résolvons-la par rapport à y. Il vient

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)x^2 + 2(BE-2CD)x + E^2 - 4CF}.$$

Le polynôme placé sous le radical sera un carré parfait si la condition

$$(4) \qquad (BE - 2CD)^2 - (B^2 - 4AC)(E^2 - 4CF) = 0$$

est remplie. Mais alors l'équation résolue devient

$$(5) \qquad y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}\left(x + \frac{BE - 2CD}{B^2 - 4AC}\right),$$

et se décompose, comme on le voit, en deux équations du premier degré. On substituera l'une de ces deux valeurs de y dans l'une des équations proposées, par exemple dans l'équation (1), ce qui donnera une équation du second degré à une seule inconnue x; on en déduira deux valeurs de x, et par suite deux valeurs correspondantes de y. On substituera de même l'autre valeur de y, ce qui donnera une nouvelle équation du second degré en x, d'où l'on dé-

duira deux autres solutions. On aura ainsi les quatre solutions des deux équations proposées.

La relation (4), simplifiée et divisée par 4C, s'écrit

$$(6) \qquad AE^2 + CD^2 - BDE + (B^2 - 4AC)F = 0;$$

si l'on remplace les lettres A, B,..... par leurs valeurs $a + \lambda a'$, $a + \lambda b'$,....., on arrive à une équation du troisième degré en λ. Il suffira de calculer l'une des racines de cette équation avec une certaine approximation.

On pourrait aussi calculer deux des racines de l'équation en λ. Substituant chacune d'elles dans l'équation (5), on aurait deux groupes d'équations du premier degré à deux inconnues que l'on combinerait deux à deux ; ces quatre combinaisons donneraient les quatre solutions des équations proposées.

219. La question algébrique que nous venons de traiter revient à la recherche des points d'intersection des deux courbes du second degré représentées par les équations (1) et (2). Quand on a déterminé λ, comme nous l'avons dit, l'équation (5) représente deux sécantes communes aux deux courbes. Il y a plusieurs cas à considérer : 1° Si l'équation du troisième degré en λ a ses trois racines réelles, et si pour deux de ces racines la quantité $B^2 - 4AC$ est positive, ces deux racines donneront deux couples d'équations du premier degré à coefficients réels, d'où l'on déduira quatre solutions réelles ; les deux courbes du second degré se coupent en quatre points et admettent en effet trois couples de sécantes réelles communes. La troisième racine rendra aussi positive la quantité $B^2 - 4AC$.

2° Si l'équation du troisième degré n'a qu'une racine réelle, ou si, l'équation ayant ses trois racines réelles, une

seule rend positive la quantité $B^2 - 4AC$, les deux courbes du second degré admettent une couple de sécantes réelles communes; dans ce cas, elles se coupent en deux points ou ne se rencontrent pas; les deux équations proposées auront, ou deux solutions réelles et deux imaginaires, ou quatre solutions imaginaires.

Exemples.

1° Soient les deux équations

$$x^2 + y^2 - 10 = 0,$$
$$xy - y\ 1 = 0.$$

L'équation du troisième degré

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 - 4\lambda - 40 = 0,$$

à laquelle on arrive, a ses trois racines réelles et comprises, l'une entre 2 et 3, l'autre entre -2 et -3, la troisième entre -8 et -9; d'ailleurs la quantité $B^2 - 4AC = \lambda^2 - 4$ est ici positive pour chacune d'elles. Donc les équations proposées admettent quatre solutions réelles que l'on calculera par l'un des deux procédés indiqués.

2° On résoudra les deux équations

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,$$
$$2xy - 1 = 0,$$

à l'aide de l'équation du troisième degré

$$\lambda^3 - \lambda - 1 = 0,$$

qui n'a qu'une racine réelle; cette racine est positive. Les deux équations du premier degré $y = \left(-\lambda \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)x \pm \sqrt{\lambda}$, qui correspondent à cette racine réelle, donnent deux sé-

cantes communes réelles. En substituant ces deux valeurs de y dans la seconde des équations proposées, on obtient les deux équations du second degré

$$\left(-\lambda \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)x^2 \pm x\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} = 0.$$

La condition de réalité des racines est $\sqrt{\lambda^3} < \pm 2$. Cette condition n'est pas remplie si l'on prend le signe inférieur. Elle l'est, au contraire, si l'on prend le signe supérieur; car, dans ce cas, la condition se réduit à $\lambda < \sqrt[3]{4}$, et si l'on substitue ce nombre $\sqrt[3]{4}$ dans l'équation en λ, on a un résultat $3 - \sqrt[3]{4}$ évidemment positif, ce qui prouve que la valeur de λ est plus petite que $\sqrt[3]{4}$. Il résulte de là qu'une seule des deux sécantes rencontre la courbe, et par suite que les deux équations proposées ont deux solutions réelles et deux imaginaires.

3° La résolution des deux équations

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,$$
$$xy - 4 = 0,$$

est ramenée à celle de l'équation du troisième degré

$$\lambda^3 - 4\lambda - 1 = 0$$

qui a ses trois racines réelles, une positive et deux négatives. La première seule rend positive la quantité

$$B^2 - 4AC = \lambda^2 - 4 = \frac{1}{\lambda};$$

et donne deux équations du premier degré à coefficients réels

$$y = \left(-\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right)x \pm 2\sqrt{\lambda}.$$

Ces valeurs de y, substituées dans la seconde des équations proposées, conduisent aux deux équations du second degré

$$\left(-\frac{\lambda}{2}\pm\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right)x^2\pm 2x\sqrt{\lambda}-4=0.$$

La condition de réalité des racines est $\sqrt{\lambda^3}<\pm 2$. Il est évident que cette condition n'est pas remplie si l'on prend le signe inférieur. Elle ne l'est pas non plus si l'on prend le signe supérieur ; car, dans ce cas, la condition se réduit à $\lambda<\sqrt[3]{4}$, et si l'on substitue cette valeur $\sqrt[3]{4}$ dans l'équation en λ, on a un résultat négatif $3-4\sqrt[3]{4}$, ce qui prouve que la valeur positive de λ est plus grande que $\sqrt[3]{4}$. Des deux sécantes communes réelles, aucune ne rencontre les courbes. Ainsi les deux équations proposées admettent quatre racines imaginaires.

4° Soient les deux équations

$$xy-y^2-x=0,$$
$$y^2-x^2-1=0.$$

Si, dans la seconde, on substitue la valeur

$$x=\frac{y^2}{y-1}.$$

tirée de la première, on arrive immédiatement à une équation du troisième degré

$$y^3-y+\frac{1}{2}=0,$$

qui a une racine réelle et deux imaginaires. A la valeur réelle de y correspond une valeur réelle de x. Ainsi les deux

équations proposées n'admettent que trois solutions, une réelle et deux imaginaires.

Les deux courbes représentées par les équations proposées sont des hyperboles, telles qu'une asymptote de l'une est parallèle à une asymptote de l'autre ; ce qui indique que l'un des points d'intersection s'est éloigné à l'infini.

220. Dans certains cas, la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues se ramène à une équation du second degré ou à une équation bicarrée.

Si les deux courbes sont semblables et semblablement placées, ce qui a lieu lorsque les coefficients des termes du second degré dans les deux équations sont proportionnels, on peut éliminer tous les termes du second degré en retranchant l'une des équations de l'autre, après l'avoir multipliée par un facteur convenable. On remplace ainsi l'une des équations proposées par une équation du premier degré ; l'élimination de y donne une équation du second degré en x.

Lorsqu'un même diamètre divise en deux parties égales les cordes parallèles dans les deux courbes, si, par une transformation de coordonnées, on rapporte les courbes à ce diamètre commun pris pour axe des x et à une parallèle aux cordes pour axe des y, les deux équations ne contiendront plus l'inconnue y qu'à la seconde puissance ; l'élimination de y^2 donnera une équation du second degré en x.

Si les deux courbes sont des hyperboles ayant une asymptote commune, en les rapportant à cette asymptote prise pour axe des x et à une droite quelconque pour axe des y, on a des équations dans lesquelles le terme en xy contient seul la lettre x; en éliminant ce terme, on obtient une équation du second degré en y.

Lorsque les deux courbes ont même centre, si on les

rapporte à ce centre commun pris pour origine des coordonnées, les deux équations ne contenant plus de termes du premier degré, l'élimination de y donnera une équation bicarrée en x.

Si les deux courbes ont un foyer commun et qu'on le prenne pour origine, les deux équations se mettront sous la forme

$$x^2+y^2=(ax+by+c)^2,$$
$$x^2+y^2=(a'x+b'y+c')^2.$$

On en déduit

$$ax+by+c=\pm(a'x+b'y+c'),$$

ou

$$(a\pm a')x+(b\pm b')y+c\pm c'=0.$$

On a ainsi deux équations du premier degré que l'on combinera avec l'une des équations proposées.

221. La méthode que nous venons d'exposer permet de ramener la résolution de l'équation du quatrième degré

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

à celle d'une équation du troisième degré. Si l'on pose en effet

$$y=x^2,$$

L'équation s'écrit

$$y^2+axy+by+cx+d=0.$$

et l'on a à résoudre deux équations du second degré à deux inconnues, question qui se ramène, comme nous l'avons vu, à la résolution d'une équation du troisième degré en λ.

Note B. *Usage de la règle à calcul.*

222. La règle à calcul est un petit instrument commode et portatif, qui remplace les tables de logarithmes, lorsqu'on n'a pas besoin d'une grande exactitude.

Elle se compose de deux parties, une *règle* fixe, et une *réglette* mobile qui glisse à frottement doux dans une rainure pratiquée au milieu de la règle. Elle est ordinairement en bois et a 25 centimètres de longueur.

Sur la face principale de la règle sont marquées deux séries de divisions inégales. Considérons spécialement la ligne supérieure; en allant de gauche à droite, on lit d'abord les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; les distances comptées à partir du point 1, qui est au commencement, sont proportionnelles aux logarithmes des nombres. Ainsi la distance de 1 à 2 représente le logarithme de 2, celle de 1 à 3 le logarithme de 3, et ainsi de suite; la distance de 1 à 10 représente le logarithme de 10, qui est un. Cette distance, qui occupe la moitié de la règle, a donc été prise pour unité de longueur.

L'intervalle entre deux nombres consécutifs est divisé en dix parties correspondantes aux dixièmes. Par exemple, l'intervalle entre 6 et 7 est divisé en dix parties par des traits plus petits, au-dessus desquels il faut supposer les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dixièmes. Ainsi la distance de l'origine 1 de la règle à la première division qui suit le nombre 6 représente le logarithme de 6,1; celle qui aboutit à la division suivante représente le logarithme 6,2 et ainsi de suite. On a de cette façon les logarithmes de tous les nombres compris entre 1 et 10, de dixièmes en dixièmes.

On remarque que de 1 à 2 chaque intervalle de dixième est subdivisé en cinq parties, dont chacune correspond à deux centièmes. Ainsi la distance de l'origine à la première petite division représente le logarithme de 0,02 ; la distance à la division suivante, celui de 0,04 ; et ainsi de suite jusqu'à 1. On a de cette manière les logarithmes des nombres fractionnaires compris entre 1 et 2, de deux centièmes en deux centièmes.

Entre 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5, l'intervalle correspondant à chaque dixième et divisé seulement en deux parties, dont chacune correspond à un demi-dixième ou à cinq centièmes. Ainsi la distance de l'origine 1 à la première petite division qui vient après 2 représente le logarithme de 2,05 ; on a ensuite le logarithme de 2,10, celui de 2,15, etc.

Au delà de 5, c'est-à-dire de 5 à 10, les intervalles de dixièmes n'ont pas été subdivisés. Cependant il est facile d'opérer cette subdivision à l'œil approximativement.

Au delà de 10, on lit sur la règle les nombres 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100. Cette seconde moitié, qui va de 10 à 100, est exactement pareille à la première moitié qui va de 1 à 10. Car le logarithme de 20, par exemple, étant égal au logarithme de 10, plus le logarithme de 2, on a porté sur la règle, à partir de 10, le logarithme de 2, ce qui donne le logarithme de 20. On a donc dans cette seconde moitié les logarithmes des nombres considérés précédemment, multipliés par 10.

L'intervalle entre deux dizaines consécutives est divisé en dix parties qui correspondent aux unités. Ainsi, entre 60 et 70, on lira 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69.

Entre 10 et 20, chaque intervalle d'unité est subdivisé en cinq parties, dont chacune correspond à deux dixièmes. Entre 20 et 30, chaque intervalle d'unité est subdivisé seu-

lement en deux parties, dont chacune correspond à une demi-unité ou à cinq dixièmes.

La réglette porte à sa partie supérieure une ligne de divisions qui est la reproduction exacte des divisions de la règle ; de sorte que, si l'on fait coïncider le 1 de la réglette avec celui de la règle, toutes les divisions de la réglette coïncideront avec celles de la règle.

Je vais expliquer maintenant comment on se sert de cet instrument pour effectuer les opérations de l'arithmétique.

Multiplication.

223. Voici la manière d'opérer.

Après avoir placé la virgule dans les deux facteurs, de manière que chacun d'eux ait un seul chiffre significatif à sa partie entière, lisez sur la règle le multiplicande; amenez en regard l'origine 1 de la réglette; lisez ensuite sur la réglette le multiplicateur et regardez sur la règle le nombre correspondant; vous aurez le produit demandé.

Quelques exemples feront bien comprendre ce procédé.

1° Multiplier 3 par 2. Lisez 3 sur la règle et faites glisser la réglette dans la coulisse, de manière à amener le 1 de la réglette sous le nombre 3; lisez ensuite 2 sur la réglette; en regard est écrit sur la règle le nombre 6 qui est le produit demandé. Et en effet, en opérant de cette manière, au logarithme de 3 on ajoute le logarithme de 2.

2° Multiplier 8 par 5. Lisez 8 sur la règle et amenez sous ce nombre le 1 de la réglette, puis lisez 5 sur la réglette; en regard sur la règle est écrit le produit demandé 40.

3° Multiplier 7 par 6. Lisez 7 sur la règle et sous ce nombre amenez le 1 de la réglette; puis lisez 6 sur la réglette,

et regardez sur la règle le nombre correspondant ; vous trouverez 42.

4° Multiplier 46 par 3. Cherchez le produit de 4,6 par 3. Lisez sur la règle 4,6 ; amenez sous cette division le 1 de la réglette ; lisez 3 sur la réglette, et regardez sur la règle le nombre correspondant ; vous trouverez 13,8. Le produit demandé est 138.

5° Multiplier 27 par 25. Cherchez le produit de 2,7 par 2,5. Lisez 2,7 sur la règle ; amenez sous cette division le 1 de la réglette ; lisez 2,5 sur la réglette, et regardez sur la règle le nombre correspondant ; la division 2,5 de la réglette ne tombe pas exactement sous une division de la règle, mais entre les deux divisions 6,7 et 6,8 et au milieu de l'intervalle ; vous avez donc 6,75, ce qui donne pour le produit demandé 675.

6° Multiplier 18 par 32. Cherchez le produit de 1,8 par 3,2. Lisez 1,8 sur la règle ; amenez sous cette division le 1 de la réglette ; lisez 3,2 sur la réglette et regardez le nombre correspondant sur la règle. La division 3,2 de la réglette tombe entre les deux divisions 5,7 et 5,8 de la règle, pas tout à fait au milieu, mais un peu plus près de 5,8 que de 5,7 ; divisant à vue l'intervalle en dix parties égales, on prendra 5,76 ce qui donne 576 pour le produit demandé. Il pourrait rester quelque incertitude sur le dernier chiffre ; mais on sait d'avance que ce dernier chiffre est 6, puisque 2 fois 8 font 16.

7° Multiplier 48 par 54. Cherchez le produit de 4,8 par 5,4. Lisez 4,8 sur la règle ; amenez sous cette division le 1 de la réglette ; lisez 5,4 sur la réglette et regardez le nombre correspondant sur la règle. La division 5,4 de la réglette tombe entre 25,5 et 26 sur la règle ; l'intervalle vaut ici cinq dixièmes ; divisant à vue cet intervalle en cinq parties éga-

les, on prendra 0,4, ce qui fait 25, 9 et 2590 pour le produit demandé, puisqu'il faut multiplier par 100. La règle à calcul ne donne que les trois premiers chiffres du produit qui est exactement 2592 ; ainsi l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{1000}$.

8° Multiplier 5,63 par 2,75. Le nombre 5,63 n'est pas marqué sur la règle; on imaginera l'intervalle de 5,6 à 5,7 divisé en dix parties, et l'on amènera le 1 de la réglette à peu près au tiers de l'intervalle. On lira ensuite 2,75 sur la réglette; le trait correspondant tombe entre 15,4 et 15,6, à peu près au milieu de l'intervalle; comme l'intervalle vaut ici 0,2 dixièmes, on prendra 0,1, ce qui fait 15,5 pour le produit demandé; le produit exact est 15,4825. L'erreur absolue est ici moindre que 0,02, et par conséquent l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{300}$.

9° Multiplier 63,8 par 0,00537. Cherchez le produit de 6,38 par 5,37. Lisez 6,38 snr la règle, en divisant à vue l'intervalle de 6,3 à 6,4 en dix parties, et amenez en regard le 1 de la réglette; lisez ensuite 5,37 sur la réglette, en divisant de la même manière à vue l'intervalle de 5,3 à 5,4 en dix parties, et regardez sur la règle le nombre qui correspond au point de la réglette où vous supposez placé 5,37. C'est à peu près 34,3. Le produit demandé est donc 0,343, à un millième près.

10° Multipliez 162,84 par 23,674. Cherchez le produit de 1,628 par 2,37 ; vous trouverez à peu près 3,86. Le produit demandé est donc 3860 avec trois chiffres exacts.

Il faut avoir soin, comme nous l'avons dit, de placer toujours la virgule après le premier chiffre significatif dans les deux facteurs du produit.

224. Remarque. Il est bon de se rendre compte de l'ap-

proximation de l'instrument. On estime que l'erreur relative ne dépasse pas $\frac{1}{250}$.

Examinons en effet avec quelle approximation on peut lire un nombre sur la règle ou sur la réglette.

Entre 1 et 2, chaque intervalle vaut 0,02. Vers 1, les intervalles étant assez grands, l'œil parvient aisément avec l'habitude à les diviser en dix parties valant chacune 0,002, de manière à ne pas commettre une erreur plus grande que deux de ces parties; ce qui fait une erreur moindre que 0,004, ou que $\frac{1}{250}$. Vers 2, les intervalles étant à peu près moitié des précédents, on peut commettre une erreur absolue deux fois plus grande, mais l'erreur relative reste la même.

Division.

225. Voici la marche à suivre :

Après avoir placé les virgules de manière que le diviseur n'ait qu'un chiffre significatif à sa partie entière, et que le dividende en ait un ou deux de manière à être plus grand que le diviseur, on amène le point qui sur la réglette correspond au diviseur sous le point qui sur la règle correspond au dividende; et on lit ensuite sur la règle le nombre qui se trouve en regard de l'origine 1 de la réglette.

1° Diviser 6 par 2. Amenez le 2 de la réglette sous le 6 de la règle; puis lisez sur la règle le nombre qui se trouve en regard de l'origine 1 de la réglette; vous obtenez ainsi le quotient 3. Et en effet, du logarithme de 6 compté sur la règle on a retranché le logarithme de 2 compté sur la réglette.

2° Diviser 40 par 8. Amenez le 8 de la réglette sous le 40 de la règle, et lisez sur la règle le nombre qui se trouve en regard de l'origine 1 de la réglette; vous obtenez le quotient 5.

3° Diviser 138 par 46. Il faudra diviser 13,8 par 4,6. Amenez la division 4,6 de la réglette sous la division 13,8 de la règle ; en regard de 1, vous trouvez le quotient 3.

4° Diviser 745 par 32. On divisera 74,5 par 3,2. Pour cela on amènera la division 3,2 de la réglette, au dessous du point qui sur la règle correspond à 74,5, en regard de 1 on lira sur la règle le quotient approché 23,3.

On aurait pu diviser 7,45 par 3,2.

5° Diviser 0,25486 par 18,527. On divisera 25,486 par 1,8527. Sous le point de la règle qui correspond à 25,48 (ce point est tout près de la division 25,5) on amènera le point de la réglette qui correspond à 1,853, et on lira sur la règle le nombre qui se trouve en regard de 1. C'est à peu près 13,75 ; le quotient demandé est 0,01375, mais on n'est pas sûr du dernier chiffre.

226. Remarque. On peut aussi, au moyen de la règle, effectuer à la fois, par une simple lecture, une multiplication et une division, et par conséquent multiplier tout d'un coup un nombre par le rapport de deux nombres donnés.

1° Multiplier 15 par $\frac{8}{6}$. Amenez le 6 de la réglette sous le 15 de la règle ; lisez ensuite 8 sur la réglette ; en regard sur la règle, vous trouverez le nombre cherché 20. Car en opérant ainsi, du logarithme de 15 on retranche le logarithme de 6, et on ajoute celui de 8.

2° Multiplier 13 par $\frac{28}{47}$. Amenez le nombre 47 lu sur la réglette sous le nombre 13 lu sur la règle ; lisez ensuite 28 sur la réglette et regardez sur la règle le nombre correspondant ; vous trouverez à peu près 7,74.

3° Calculer $\frac{954 \times 0,0875}{46,3}$. On calculera la quantité $\frac{9,54 \times 8,75}{4,63}$, dix fois plus grande que la précédente. Ame-

nant 4,63 sous 9,54 et lisant sur la règle le nombre qui se trouve en regard de 8,75, on trouve à peu près 18,03. Le nombre cherché est donc 1,803. Mais on ne peut pas compter sur l'exactitude du dernier chiffre.

Carrés et racines carrées.

227. Sur la face de la règle sont marquées deux séries de divisions. Jusqu'à présent nous ne nous sommes servis que de la ligne supérieure. Les divisions de la ligne inférieures sont deux fois plus grandes que celles de la ligne supérieure; les longueurs, étant doublées sur la ligne inférieure, représentent ainsi les logarithmes des carrés des nombres. Par exemple, la distance de 1 à 2 sur la ligne inférieure, étant deux fois plus grande que celle de 1 à 2 sur la ligne supérieure, représente le logarithme du carré de 2, c'est-à-dire de 4. De même la distance de 1 à 3 sur la ligne inférieure représente le logarithme du carré de 3, et ainsi de suite. La ligne entière représente le logarithme du carré de 10, c'est-à-dire le logarithme de 100.

L'intervalle entre deux nombres consécutifs est divisé en dix parties qui correspondent aux dixièmes. Par exemple, l'intervalle entre 4 et 5 est divisé en dix parties qui correspondent aux dixièmes, et chacune de ces parties a été subdivisée en deux parties plus petites dont chacune correspond à cinq centièmes. Entre 2 et 3, ou entre 3 et 4, chacune des parties a été subdivisée en cinq, valant chacune deux centièmes. Entre 1 et 2, chacune des parties a été subdivisée en dix parties valant chacune un centième.

La réglette porte aussi deux séries de divisions. Mais la ligne inférieure est la reproduction exacte de la ligne supérieure.

Si l'on amène l'origine 1 de la réglette en coïncidence avec celle de la règle, la ligne inférieure de la réglette donnera les logarithmes des nombres ; la ligne inférieure de la règle les logarithmes de leurs carrés ; en regard l'un de l'autre se trouveront donc, écrits sur ces deux lignes, un nombre et son carré. Par exemple, en regard du nombre 5 écrit sur la ligne inférieure de la règle, on lit sur la réglette le carré 25 ; car la distance de 1 à 5, sur la ligne inférieure de la règle, représente le logarithme du carré de 5 ; mais on voit sur la réglette que cette longueur est le logarithme de 25 ; on en conclut que 25 est le carré de 5. Ainsi, en regard des nombres écrits sur la ligne inférieure de la règle se trouve leurs carrés sur la réglette.

228. Il est facile de comprendre maintenant la manière de procéder. *Pour trouver le carré d'un nombre, après avoir placé la virgule dans ce nombre de manière qu'il n'ait qu'un chiffre à sa partie entière, et avoir amené l'origine de la réglette en coïncidence avec celle de la règle, lisez sur la ligne inférieure de la règle le nombre donné et regardez sur la réglette le nombre correspondant, vous aurez le carré demandé.*

1° On demande, par exemple, le carré de 6,5. Lisez 6,5 sur la ligne inférieure de la règle ; en regard sur la réglette vous trouverez son carré 42,3 à un dixième près.

2° Trouver le carré de 12,7. On cherchera le carré de 1,27. Lisez 1,27 sur la règle ; en regard sur la réglette vous trouvez son carré 1,615. Le carré demandé est donc 161,5. Mais on ne peut pas compter sur le dernier chiffre.

3° Trouver le carré de 0,432. Cherchez celui de 4,32. En regard du nombre 4,32 lu sur la ligne inférieure de la règle, vous trouverez sur la réglette son carré 18,65. Le carré demandé est donc 0,1865.

229. Le même procédé s'applique à l'extraction de la

racine carrée. *Pour trouver la racine carrée d'un nombre donné, après avoir déplacé la virgule d'un nombre pair de rangs, de manière que le nombre ait un ou deux chiffres à sa partie entière, et amené l'origine de la réglette en coïncidence avec celle de la règle, lisez sur la réglette le nombre donné et regardez sur la ligne inférieure de la règle le nombre correspondant, vous aurez la racine demandée.* En effet, puisque le nombre inscrit sur la réglette est le carré du nombre correspondant sur la ligne inférieure de la règle, réciproquement ce dernier nombre est la racine carrée du premier.

1° Extraire la racine carrée de 34,5. Lisez 34,5 sur la réglette et regardez quel est le nombre correspondant sur la ligne inférieure de la règle, vous trouverez la racine cherchée 5,87.

2° Extraire la racine carrée de 7,48. Lisez 7,48 sur la réglette et cherchez le nombre correspondant sur la règle, vous trouverez 2,73.

3° Extraire la racine carrée de 748. Déplaçant la virgule de deux rangs vers la gauche, cherchez la racine de 7,48 qui est 2,73. Pour revenir du nombre 7,48 au nombre proposé 748, il faut multiplier par 100; il faudra donc multiplier la racine par 10, ce qui donne 27,3.

4° Extraire la racine carrée de 0,345. Déplaçant la virgule de deux rangs vers la droite, vous chercherez la racine de 34,5, qui est 5,87. Il faut ensuite diviser par 10, ce qui donne 0,587.

5° Calculer $x = \sqrt{8,7 \times 4,5}$. Sous 8,7 lu sur la ligne supérieure de la règle, amenez l'origine 1 de la réglette; lisez 4,5 sur la réglette et regardez le nombre correspondant sur la ligne inférieure de la règle, vous aurez $x = 6,26$.

6° Calculer $x = \sqrt{87 \times 4,5}$. Si l'on amenait l'origine 1

de la réglette sous 87, le nombre 4,5 lu sur la réglette sortirait de la règle ; on évite cet inconvénient en divisant le produit par 100 ; pour cela on amène sous 87 l'extrémité 100 de la réglette ; puis on lit 4,5 sur la réglette et on cherche le nombre correspondant sur la ligne inférieure de la règle ; c'est 1,985. Il faut multiplier par 10 ; donc $x = 19,85$.

7° Calculer $x = \sqrt{\frac{53,7}{8,6}}$. Sous 53,7 amenez 8,6 lu sur la réglette, puis regardez sur la ligne inférieure de la règle le nombre qui correspond à l'origine 1 de la réglette, vous trouverez $x = 2,50$.

8° Calculer $x = \sqrt{\frac{5,37}{8,6}}$. Sous 5,37 amenez 8,6 ; mais comme l'origine 1 de la réglette sort de la règle, multipliez le quotient par 100, et par conséquent lisez sur la ligne inférieure de la règle le nombre qui correspond à l'extrémité 100 de la réglette, vous trouverez 7,90. Il faut diviser ce résultat par 10 ; donc $x = 0,790$.

Cubes et racines cubiques.

230. *Pour former le cube d'un nombre dont la partie entière ne contient qu'un chiffre significatif, lisez ce nombre sur la ligne inférieure de la règle et amenez en regard l'une des deux extrémités de la réglette. Lisez ensuite ce même nombre sur la réglette et regardez le nombre correspondant sur la ligne supérieure de la règle, vous aurez le cube cherché.*

Pour trouver le cube de 3, on lira 3 sur la ligne inférieure de la règle, et on amènera en regard l'origine 1 de la réglette ; on lira ensuite 3 sur la réglette, et on cherchera le nombre correspondant 27 sur la ligne supérieure de la

règle ; 27 est le cube de 3 ; car, en opérant ainsi, au logarithme du carré de 3, on a ajouté le logarithme de 3, ce qui donne le logarithme du cube de 3. Soit encore à former le cube de 6. Si l'on amenait l'origine 1 de la réglette en regard du nombre 6 lu sur la ligne inférieure de la règle, le nombre 6 lu sur la réglette sortirait de la règle. Pour éviter cet inconvénient, on divisera le cube par 100, en amenant en regard du nombre 6 l'autre extrémité de la réglette, qui est marquée 100 ; lisant ensuite 6 sur la réglette, on trouve 2,16, ce qui fait 216.

231. On peut modifier ce procédé de manière à le rendre applicable à l'extraction des racines cubiques. Otons la réglette, puis remettons-la dans la coulisse après l'avoir retournée de manière que l'extrémité de droite vienne à gauche, et réciproquement : les numéros paraîtront renversés, mais on les lira cependant facilement. Si l'on veut former le cube de 3, on amènera en coïncidence les deux divisions marquées 3 sur la ligne inférieure de la règle et sur la réglette ; puis on lira le nombre qui, sur la ligne supérieure de la règle, correspond à l'extrémité 1 de la réglette ; c'est 27, le cube de 3. En opérant ainsi, au logarithme du carré de 3 on a encore ajouté le logarithme de 3.

Pour trouver le cube de 6, on amènera en coïncidence les deux divisions marquées 6 sur la réglette et sur la ligne inférieure de la règle ; comme l'extrémité 1 de la réglette dépasse la règle, on divisera par 100 et on lira le nombre qui, sur la ligne supérieure de la règle, correspond à l'extrémité gauche 100 de la réglette.

Proposons-nous de former le cube de 8,4. On amènera en coïncidence les deux divisions 8,4 de la réglette et de la ligne inférieure de la règle, et on lira sur la ligne supérieure

de la règle le nombre qui correspond à l'extrémité 100 de la réglette, c'est 5,93. Le cube demandé est 593.

Soit encore à former le cube de 2,35. Opérant de la même manière, on trouve 12,98.

232. Le procédé que nous venons d'indiquer donne immédiatement les racines cubiques. Le nombre ayant été préalablement multiplié ou divisé par une puissance de 1000, de manière qu'il ait un, deux ou trois chiffres à sa partie entière, et la réglette étant retournée comme nous l'avons dit, on lira le nombre sur la ligne supérieure de la règle; et l'on amènera en regard l'extrémité droite 1 de la réglette; puis on cherchera sur la ligne inférieure de la règle et sur la réglette quelles sont les divisions correspondantes qui coïncident.

On demande, par exemple, la racine cubique de 27. On lira 27 sur la ligne supérieure de la règle, et l'on amènera sous ce nombre l'extrémité 1 de la réglette; regardant ensuite les lignes inférieures, on verra que les divisions de même nom 3 coïncident. On en conclut que 3 est la racine cubique de 27. Ceci résulte de ce que nous avons dit précédemment.

Soit encore à trouver la racine cubique de 216. Ce nombre étant plus grand que 100 ne se trouve pas sur la règle; divisant par 100, on lira 2,16 sur la ligne supérieure de la règle, et on amènera sous ce nombre l'extrémité 100 de la réglette; l'extrémité 1 de la réglette sort de la règle et occupe une position telle que, si la règle était prolongée vers la droite, elle se trouverait précisément au-dessous du nombre 216. On cherchera sur les lignes inférieures les divisions de même nom qui coïncident; ce sont les divisions 6. Donc 6 est la racine cubique de 216.

Proposons-nous maintenant d'extraire la racine cubique

de 78. On amènera l'extrémité 1 de la réglette sous le nombre 78 lu sur la ligne supérieure de la règle; puis on cherchera sur les lignes inférieures quelles sont les divisions de même nom qui coïncident. Cette détermination offre quelque difficulté; on procédera de la manière suivante : Parcourant des yeux la réglette de droite à gauche et la ligne inférieure de la règle de gauche à droite, on voit que le nombre 2 de la réglette est à droite du nombre 2 de la règle; que de même 3 est encore à droite de 3, 4 à droite de 4, mais que le 5 de la réglette est à gauche du 5 de la règle. On en conclut que la coïncidence ou le croisement a lieu entre 4 et 5, et par conséquent que 4 est le premier chiffre de la racine cherchée. On parcourra ensuite de la même manière l'intervalle de 4 à 5 de dixièmes en dixièmes; le premier dixième après 4 sur la réglette est à droite de la division correspondante sur la règle; le second dixième est encore à droite du second dixième; mais le troisième passe à gauche du troisième dixième. Ainsi le croisement a lieu entre le second et le troisième dixième. On en conclut que 2 est le second chiffre de la racine, c'est-à-dire que cette racine est comprise entre 4,2 et 4,3. Pour évaluer la fraction, on remarque que la division 4,25 de la réglette est encore à droite de la division correspondante sur la règle; la racine est donc comprise dans l'intervalle de 4,25 à 4,30. En examinant cet intervalle sur les deux lignes, on voit que la coïncidence a lieu à peu près au milieu de l'intervalle; on prendra donc 4,27 pour la racine cherchée.

Pour dernier exemple, cherchons encore la racine cubique de 6450. Divisant ce nombre par 1000, on cherchera la racine cubique de 6,45. Amenons l'extrémité 1 de la réglette sous le nombre 6,45, et cherchons les coïncidences sur les lignes inférieures, comme nous l'avons expliqué.

Le 1 de la réglette étant à droite de 1, et 2 à gauche de 2, la racine est comprise entre 1 et 2. En parcourant cet intervalle, on voit que la division 1,8 de la réglette est encore à droite de la division 1,8 de la règle, mais que 1,9 est à gauche de 1,9; la racine est done comprise entre 1,8 et 1,9. Suivons maintenant les subdivisions de cet intervalle: la division 1,86 de la réglette est encore à droite de la division 1,86 de la règle; mais 1,88 est à gauche; la racine est donc comprise entre 1,86 et 1,88. Fractionnant à vue d'œil cette division en deux parties sur la réglette, on voit que 1,87 est à gauche de 1,87; donc la racine est comprise entre 1,86 et 1,87. Estimant approximativement le point de coïncidence, on prendra 1,862. Il faut multiplier par 10, ce qui donne 18,62 pour la racine cherchée.

La règle à calcul peut encore servir à effectuer des calculs trigonométriques, tels que des résolutions de triangles. On emploie pour cela la face inférieure de la réglette, que l'on retourne sens dessus dessous.

FIN.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Ce, rue Racine, 26.

